Ma.
o
149 c

Dr. A. Kleyer's

Mathematisch-technisch-naturwissenschaftliche Encyklopädie.

Lehrbuch

der

Zinseszins- und Rentenrechnung.

Dr. A. Kleyer's

Mathem.-techn.-naturwissenschaftliche Encyklopädie

enthält die **sämtlichen Definitionen, Lehrsätze, Formeln, Regeln etc.,** sowie die **denkbar mannigfaltigsten gelösten** und analogen **ungelösten Beispiele und praktischen Aufgaben,** welche in den sämtlichen Zweigen der

Rechenkunst, der niederen, höheren und angewandten Mathematik,

nämlich in den kaufmännischen und bürgerlichen Rechnungsarten, in der Algebra, Planimetrie, Stereometrie, synthetischen Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, Differential- und Integralrechnung etc., in der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, math. Geographie Astronomie, in dem Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- und Hochbau, sowie in den Konstruktionslehren, als: darstellende Geometrie, Polar- und Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc.

vorkommen und ist, infolge der eigentümlichen und praktischen Anordnung dieser Disciplinen, infolge der zahlreichen, jedem einzelnen Lehrsatz und Abschnitt beigegebenen

mannigfaltigen vollständig gelösten und analogen ungelösten praktischen Aufgaben,

sowie infolge der vielen sauberen **in den Text gedruckten Holzschnitten** und beigefügten **lithographischen Tafeln** von zahlreichen fachmännischen Seiten aus allen Teilen Europas und Amerikas als

das **praktischste Lehrbuch für Schüler aller Schulen** (indem jedes Hauptkapitel als ein für sich bestehendes Ganze abgeschlossen ist und allein bezogen werden kann), als

das **beste Handbuch für Lehrer und Examinatoren** (indem Definitionen etc. meist in Fragen und Antworten gegeben sind), als

das **vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium für jeden einzelnen Teil der erwähnten Wissenschaften,** und als

ein **vortreffliches Nachschlagebuch für Fachleute, Militärs, Ingenieure, Architekten, Techniker jeder Art**

anerkannt worden.

Stuttgart, im Januar 1885.

Die Verlagshandlung.

Erschienen sind:

1). **Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.**
2). **Lehrbuch der Logarithmen.**
3). **Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln.**
4). **Lehrbuch der Körperberechnungen,** 1. Buch.
5). **Lehrbuch der arithmetischen u. geometrischen Progressionen.**
6). **Lehrbuch des Magnetismus.**

Sämtlich besonders bearbeitet für den **Schulunterricht** und das **Selbststudium** von Dr. A. Kleyer.

Lehrbuch

der

Zinseszins- und Rentenrechnung

nebst einer

Sammlung von 525 gelösten und ungelösten Aufgaben

aus allen Zweigen des Berufslebens

zum

Gebrauch an niederen und höheren Schulen, zum rationellen Selbststudium, sowie zum praktischen Gebrauch

bearbeitet von

Dr. A. Kleyer

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hess. Geometer I. Klasse in Frankfurt a. M.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1885.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Um den Zweck der Zinseszins- und Rentenrechnung verstehen, die hohe Bedeutung derselben ermessen zu können, empfehle ich das, wenn auch nur ganz oberflächliche Durchlesen der im vorliegenden Buche enthaltenen Aufgaben.

Infolge der Erkenntnis jener hohen Bedeutung, welche die Zinseszins- und Rentenrechnung in ihrer Anwendung auf das kaufmännische Geschäfts-, das praktische Berufs-, das Gesellschafts-, Gemeinde- und Staatsleben genommen hat und stetig noch mehr gewinnt, wurde bereits eine sehr grosse Anzahl von Lehrbüchern über diesen Zweig der Mathematik geschrieben.

Die Beurteilung, ob alle, bezw. welche dieser Bücher den Zwecken entsprechen, für welche sie geschrieben sind, muss ich denjenigen überlassen, welche an der Hand eines oder des andern dieser Bücher das erzielten, was sie wünschten. Nach meinem Dafürhalten kann keines dieser Bücher als Lehrbuch in des Wortes strenger Bedeutung dienen, in welchem der betreffende Verfasser sich damit begnügte, einige der am häufigsten zur Anwendung kommenden Formeln zu entwickeln und vielleicht auch noch an einigen Beispielen zu erläutern suchte, denn ich stelle an ein Lehrbuch die Anforderung, dass ich in demselben über alles, was sich auf den Zweig der Wissenschaft bezieht, für welche das Lehrbuch als solches geschrieben ist, ohne grosse Mühe belehrenden Aufschluss finden kann, — ist dies nicht der Fall, so ist das Buch nur ein Uebungsbuch und das sind die meisten unter dem Titel von Lehrbüchern erscheinenden Bücher, — und da die Zinseszins- und Rentenrechnung nicht in der Entwicklung von Formeln, welche ausschliesslich nur ein Mittel zum Zweck sind, sondern in der Lösung solcher Probleme besteht, bei welchen Zinseszinsen in Rechnung gezogen werden müssen, diese Probleme aber in dem kaufmännischen Geschäfts-, praktischen Berufs-, in dem Gesellschafts-, Gemeinde- und Staatsleben in hundert und hundertfach verschiedener Form auftreten,

> — wobei ich auch die Fälle nicht unerwähnt lassen möchte, in welchen im bürgerlichen und Geschäftsleben dem Gebrauch und der Bequemlichkeit entsprechend nach Grundsätzen gerechnet wird, die den streng mathematischen Grundsätzen widersprechen —

so kann unter einem Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nur ein solches verstanden werden, in welchem diese hundert und hundertfach verschiedenen Formen vorgeführt sind und gezeigt wird, wie man bei der Lösung entsprechender Probleme zu verfahren hat.

Dies war der Grundgedanke, der mich bei Bearbeitung des vorliegenden Buches leitete, und ich habe mich deshalb nicht damit begnügt, Formeln zu ent-

wickeln, sondern ich versuchte ganz besonders an vielen der mannigfaltigsten Aufgaben zu zeigen, in welcher Weise die entwickelten Formeln in den einzelnen Fällen anzuwenden sind und wie in Fällen verfahren werden muss, in welchen man sich nicht mehr durch einfache Substituierung einer Formel helfen konnte, denn nur hierdurch kann der Studierende sowohl als der Praktiker auf rasche und wenig mühevolle Weise eine Umsicht in der Lösung diesbezüglicher Probleme erlangen, die ihn befähigt, in allen vorkommenden Fällen mit mathematischer Bestimmtheit zu entscheiden.

In Betreff der Anordnung des Materials in diesem Buche bemerke ich, dass der I. Teil desselben ausschliesslich der Zinseszinsrechnung,
„ II. „ „ „ „ Rentenrechnung (Zeitrentenrechnung*)
und der
III. Teil desselben gemischten Aufgaben über die Zinseszins- und Rentenrechnung gewidmet ist.

Während ich in den zwei ersten Teilen die Zinseszins- und die Rentenrechnung als getrennte Teile einer Wissenschaft vorgeführt habe, will ich durch die in dem III. Teil enthaltenen Aufgaben im allgemeinen zeigen, dass eine Grenze zwischen der Zinseszins- und Rentenrechnung nicht besteht, dass der Unterschied beider Rechnungsarten nur in einigen gebräuchlichen Benennungen zu suchen ist.

Dem III. Teile habe ich einige Hülfstafeln, ein ausführliches Formelnverzeichnis und eine übersichtliche Darstellung des Inhalts der in diesem Buche vorgeführten gelösten Aufgaben beigefügt, durch deren Gebrauch das Studium des Buches und die Lösung von Aufgaben erleichtert wird.

Mein Wunsch ist nun der, dass dieses Buch als ein brauchbares Lehr-, Hülfs-, Nachschlage- und Uebungsbuch anerkannt werden möchte.

Frankfurt a. M., im Februar 1885.

Dr. A. Kleyer.

*). Die Berechnungen der Leibrenten etc. sind in meinen Lehrbüchern über das Versicherungswesen enthalten. D. O.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil: Die Zinseszinsrechnung.

Seite

A. Ueber Zins, Prozent, Zinsfuss, Zinsfaktor, Zinseszinsrechnung im allgemeinen 1

B. Entwicklung der Zinseszinsformeln, nebst diesbezüglichen Aufgaben.

1). Entwicklung der Hauptzinseszinsformel 4
Gelöste Aufgaben.

2). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn sich ein Kapital ver-m-fachen soll . 13
Gelöste Aufgaben. (Seite 8 der 1. Aufl.)

3). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten zum Kapital geschlagen werden 14
Gelöste Aufgaben. (Seite 9 der 1. Aufl.)

4). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt wird 17

5). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird 25

6). Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Anfange eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird 33

7). Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende, bezw. am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird 36

8). Entwicklung der Hauptzinseszinsformel, wenn die Anzahl n der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist 38

a). Beweis der Allgemeingültigkeit der Zinseszinsformel 1 38

b). Entwicklung der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Zinseszinsformel, wenn die Anzahl n der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist 40

C. Gemischte praktische Aufgaben über die Zinseszinsrechnung.

1). **Gelöste Aufgaben** 42

2). **Ungelöste Aufgaben.**

a). Aufgaben zur Anwendung der Formel 1:

α). Gesucht: K 121

β). „ k 122

γ). „ n 123

δ). „ p 124

b). Aufgaben zur Anwendung der Formel 2:

α). Gesucht: n 125

β). „ p 126

c). Aufgaben zur Anwendung der Formel 3:

α). Gesucht: K 126

β). „ k }
γ). „ n } 127

Seite

d). Aufgaben zur Anwendung der Formel 4:
α). Gesucht: K }
β). „ k } 127
γ). „ r }
δ). „ n } 128

e). Aufgaben zur Anwendung der Formel 5:
α). Gesucht: K }
β). „ r } 128
γ). „ n 129

f). Aufgaben zur Anwendung der Formel 6:
α). Gesucht: K 129
β). „ k }
γ). „ r } 130
δ). „ n }

g). Aufgaben zur Anwendung der Formel 7:
α). Gesucht: k }
β). „ r } 131
γ). „ n 132
δ). „ p 133

h). Aufgaben zur Anwendung der Formeln 8 und 9:
α). Gesucht: K }
β). „ r } 133

i). Aufgaben zur Anwendung der Formel 10:
α). Gesucht: K }
β). „ r } 134
γ). „ n }

k). Aufgaben zur Anwendung der Formeln 11—17:
α). Gesucht: K 134
β). „ n 135

l). Aufgaben zur Anwendung der Formel 18 und sonstige Aufgaben, in welchen die Anzahl n der Jahre eine gebrochene ist.
α). Gesucht: K 135
β). „ k }
γ). „ n } 136
δ). „ p }

m). Besondere Aufgaben:
α). Aufgaben, welche durch Ansetzen von Gleichungen und durch Verbinden der aufgestellten Formeln 1—20 gelöst werden . . 137
β). Aufgaben über Ersparungen und Sparkassenrechnungen . . . 142
γ). Aufgaben über Schuldentilgungen, Amortisationen, Abfindungen 143
δ). Aufgaben über Barwerte 145
ε). Aufgaben über Diskont- und Terminalrechnungen 146
ζ). Aufgaben aus der Forstwissenschaft 147
ξ). Aufgaben über Stadt- und Landbevölkerungen 147

Anhang.

1). Einige Aufgaben aus der Zinseszinsrechnung gelöst durch Anwendung der Kettenbrüche 148
2). Entwicklung der Diskontoformeln.
a). Entwicklung der Leibnitz'schen Diskontoformel 151
b). „ „ Hoffmann'schen „ 152
c). Untersuchung, welches die mathematisch richtige Diskontoformel ist . 153

II. Teil: Die Rentenrechnung.

Seite

A. Ueber die Renten und die Rentenrechnung im allgemeinen 161

B. Ueber die Berechnung der Zeitrenten.

1). Entwicklung der Rentenformeln für eine nachschüssige Jahresrente . . . 164
Gelöste Aufgaben . 166
2). Entwicklung der Rentenformeln für eine vorschüssige Jahresrente 172
Gelöste Aufgaben . 174
3). Entwicklung der Rentenformeln für eine nachschüssige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahre fällig sind 179
Gelöste Aufgaben . 180
4). Entwicklung der Rentenformeln für eine vorschüssige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahre fällig sind 183
Gelöste Aufgaben . 185
5). Entwicklung der Rentenformeln für eine nachschüssige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind 189
6). Entwicklung der Rentenformeln für eine vorschüssige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind 191
Gelöste Aufgaben . 193
7). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene Jahresrenten:
α). für nachschüssige Renten 197
β). für vorschüssige Renten 200
Gelöste Aufgaben . 202
8). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind:
α). für nachschüssige Renten 207
β). für vorschüssige Renten 209
9). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind:
α). für nachschüssige Renten 210
β). für vorschüssige Renten 211

C. Ueber die Berechnung der Leibrenten 213

D. Ueber die Berechnung der ewigen Renten:

1). Entwicklung der Rentenformeln für nachschüssige ewige Jahresrenten . . . 213
2). Entwicklung der Rentenformeln für vorschüssige ewige Jahresrenten . . . 214
3). Entwicklung der Rentenformeln für nachschüssige ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind 215
4). Entwicklung der Rentenformeln für vorschüssige ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind 216
5). Entwicklung der Rentenformeln für nachschüssige ewige Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind 217
6). Entwicklung der Rentenformeln für vorschüssige ewige Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind 218
7). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene ewige Jahresrenten:
α). für nachschüssige Renten 219
β). für vorschüssige Renten 219
8). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind:
α). für nachschüssige Renten 220
β). für vorschüssige Renten 221
9). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene ewige Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind:

Seite

α). für nachschüssige Renten 222

β). für vorschüssige Renten 223

Gelöste Aufgaben . 224

E. **Gemischte praktische Aufgaben über die Rentenrechnung**

unter anderem:

α). Aufgaben über den mittleren Zahlungstermin von Renten,

β). „ „ Verwandlung von Renten,

γ). „ „ solche Renten, welchen zweierlei Zinsfuss zu Grunde liegt,

δ). „ „ „ „ welche nach arithmetischer oder geometrischer Progression wachsen.

1). **Gelöste Aufgaben,** mit einigen sich daraus ergebenden weiteren Formeln 227

2). **Ungelöste Aufgaben** 258

III. Teil.

A. **Gemischte praktische Aufgaben über die Zinseszins- und Rentenrechnung nebst Andeutungen.**

1). Aufgaben über Ersparungen 269

2). Aufgaben über Schuldentilgungen, Amortisationen und Abfindungen:

α). Aufgaben über die Berechnung von Terminalzahlungen 269

β). „ „ „ „ „ baren Abfindungssummen 271

γ). „ „ „ „ „ Zahlungsterminen 272

δ). „ „ „ „ „ des mittleren Zahlungstermins . . 273

ε). „ „ „ „ „ Diskontrechnungen 273

3). Aufgaben über Zeitrenten, Lebensversicherungen und Witwenpensionen . . 274

4). „ „ die Ablösung ewigwährender Verpflichtungen 277

5). Gemischte Aufgaben aus dem praktischen Leben 280

6). Praktische Aufgaben aus der Forstwirtschaft 282

7). Mischungsaufgaben . 290

B. **Hülfstafeln.**

1). **Hülfstafel I,** enthaltend die künftigen Werte der Geldeinheit bei p %, nach 1 bis 100 Jahren, oder enthaltend die natürlichen Werte von $1{,}0p^n$ für $p = 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 6$ und für $n = 1$ bis incl. 100 . . . 294

2). **Hülfstafel II,** enthaltend die Briggsschen Logarithmen der am häufigsten vorkommenden Zinsfaktoren und zwar bis auf 10 Dezimalstellen genau . . 298

3). **Hülfstafel III, Diskontierungstabelle,** enthaltend die baren Werte der Geldeinheit, welche bezw. nach 1 bis 100 Jahren mit p% Zinseszinsen zahlbar ist, oder enthaltend die natürlichen Werte von $\frac{1}{1{,}0p^n}$ 299

C. **Genaues Verzeichnis der Formeln, welche in diesem Buche entwickelt wurden** . 303

D. **Uebersichtliche Zusammenstellung des Inhalts der in diesem Buche vollständig gelösten Aufgaben** 313

I. Teil.

Die Zinseszinsrechnung.

Die Zinseszinsrechnung.

A. Ueber Zins, Prozent, Zinsfuss, Zinsfaktor und Zinseszinsrechnung im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter „Zins“ im allgemeinen und im engeren Sinne?

Antwort. Unter Zins (foenus, usurae) oder Interesse versteht man im allgemeinen die Vergütung (den Miethpreis), welche für irgend ein entliehenes Gut zu entrichten ist. — Im engeren Sinne versteht man unter Zins die Geldvergütung (den Miethzins), welche man für ein geliehenes Geldkapital, für die Benutzung von Häusern und Wohnungen etc., nach einer gewissen Zeit entrichten muss (siehe Erkl. 1).

Erkl. 1. Die Vergütung (der Miethpreis), welche für Benutzung von Grund und Boden zu entrichten ist, nennt man „Pacht“.

Frage 2. Was versteht man unter einem „Kapital“?

Antwort. Im gewöhnlichen Sinne versteht man unter einem Kapital eine Summe Geldes, welche nutzbringend, zinstragend angelegt oder ausgeliehen wird, ohne dass sie sich selbst vermindert oder ohne dass sie verloren geht (siehe Erkl. 2).

Erkl. 2. Unter Kapital im weiteren Sinne versteht man jedes Produkt (wie z. B. Boden, Baulichkeiten, Werkzeuge, Maschinen, Geräte, Saatkörner, Kundschaft eines Geschäftes, Erwerbsquelle etc. etc.), das zur Produktion bestimmt ist und welches bei seinem diesbezüglichen Gebrauchtwerden mehr erzeugt, als sein ursprünglicher Wert ist.

Man unterscheidet tote (schlafende) Kapitalien, das sind solche, die nicht nutzbringend angelegt sind, und werbende Kapitale, das sind solche, welche nutzbringend angelegt sind.

Frage 3. Was versteht man unter „Prozent“ im allgemeinen und im engeren Sinne?

Antwort. Unter Prozent (v. lat., d. h. für hundert; franz. *pour cent*, engl. *per cent*) versteht man im allgemeinen Sinne das Verhältnis eines Teils einer Grösse zu 100 Teilen einer anderen gleichartigen Grösse. — Im engeren Sinne versteht man unter Prozent das in Hundertteilen ausgedrückte Verhältnis der Zinsen zum Kapital, also die Zahl der Geldeinheiten der Zinsen, welche auf 100 Geldeinheiten des Kapitals nach einer gewissen Zeit, gewöhnlich nach einem Jahre, selten nach Bruchteilen eines Jahres, kommen. (Siehe Erkl. 3.)

Erkl. 3. Das Zeichen für Prozent ist:
%, oder pc. oder pCt.

Erkl. 4. Der mittelst eines Kapitals erzielte Gewinn oder Verlust wird meist in Prozenten ausgedrückt.

Frage 4. Was versteht man unter „Zinsfuss“ und wie wird derselbe bezeichnet?

Erkl. 5. In Betreff des Zinsfusses sei bemerkt, dass sich derselbe im allgemeinen nach dem bestehenden Mangel oder Ueberfluss an barem Gelde, oft auch nach der Sicherheit, welche für die Zahlung der Zinsen (und des Kapitals selbst) gewährt wird, richtet; deshalb ist der Zinsfuss für Darlehen, die durch Hypotheken (siehe Erkl. 6) etc. gesichert sind, meist geringer, als für solche, welche nur auf guten Glauben an die Solvenz (s. Erkl. 7) des Leihenden gemacht werden.

In den meisten Ländern ist ein landesüblicher Zinsfuss festgesetzt, welcher sich nach dem durchschnittlichen Marktpreis des Geldes richtet, dessen Ueberschreitung verboten und als Zinswucher bestraft wird.

Erkl. 6. Unter „Hypothek“ (v. griech. *Pignus*, Pfand-, Unterpfandsrecht) versteht man das, jemandem an einem bestimmten unbeweglichen Eigentum (Immobil) eines Dritten, ohne Besitzübertragung eingeräumte Recht, die gepfändete Sache (das Pfand, auch selbst Hypothek genannt) nötigenfalls veräussern zu dürfen, um sich für seine Forderung an jenen Dritten befriedigen zu können.

Erkl. 7. Solvenz (v. lat.) heisst die Zahlungsfähigkeit. Solvent oder solvabel heisst zahlungsfähig. Im Gegensatz hierzu heisst: Insolvenz die Zahlungsunfähigkeit; insolvent, zahlungsunfähig.

Antwort. Unter Zinsfuss versteht man im bürgerlichen Leben die in Prozenten ausgedrückte Höhe der jährlichen Zinsen, also die Zinsen, welche 100 Geldeinheiten nach Verlauf eines Jahres tragen. — Der Zinsfuss ist hiernach gleichbedeutend mit Prozent im engeren Sinne und wird mit „p“ bezeichnet.

Streng genommen sollte man unter Zinsfuss „den Zins verstehen, welchen die Geldeinheit nach einem Jahre trägt“, weil der Zinsfuss den Massstab abgibt, nach welchem die Zinsen eines Kapitals berechnet werden und die Massstäbe für zu messenden und zu berechnenden Grössen fast stets auf die Einheit bezogen werden (siehe die Erkl. 5, 6 und 7).

Ist z. B. nach letzterer Definition ein Kapital zu $p\,\%$ ausgeliehen, so würde der Zinsfuss $= \frac{p}{100}$ sein; denn $p\,\%$ heisst:

100 Geldeinheiten tragen in 1 Jahr p Geldeinheiten Zinsen, mithin trägt 1 Geldeinheit in 1 Jahre $\frac{p}{100}$ Geldeinheiten Zinsen.

Frage 5. Was versteht man unter dem sogenannten „Zinsfaktor“ und wie wird derselbe gefunden, bezw. ausgedrückt?

Erkl. 8. Als Geldeinheit ist hier die deutsche Reichsmark, bezeichnet durch „*M.*“, angenommen.

Erkl. 9. In den Ausdrücken: $1 + 0{,}0p$ oder $1{,}0p$ ist p kein Faktor und man hat sich bei Zahlenaufgaben an die Stelle von p stets die Zahl gesetzt zu denken, welche die Prozente angibt.

Beispiel 1.

Ist z. B.:

$p = 4\,\%$, bezw. $= 5\,\%$ etc.,

so hat man für:

$1{,}0p = 1{,}04$, bezw. $= 1{,}05$ etc. zu setzen.

Beispiel 2.

Ist z. B.:

$p = 4\frac{1}{2}\,\%$, bezw. $= 3{,}5$, bezw. $= \frac{1}{4}$ ($= 0{,}25$), bezw. $= 0{,}2$ etc.,

Antwort. Unter Zinsfaktor, auch Verzinsungsfaktor, versteht man den künftigen Wert der Geldeinheit nach einem Jahre, wenn dieselbe zu einem gewissen Prozentsatz p ausgeliehen wird.

Der Zinsfaktor wird bei gegebenem Prozentsatze p auf folgende Weise gefunden:

Ist ein Kapital zu $p\,\%$ ausgeliehen, so heisst dies (siehe Erkl. 8):

100 *M.* bringen nach 1 Jahre bei $p\,\%$ p *M.* Zinsen;

sonach ist der künftige Wert von 100 Mark nach 1 Jahre bei $p\,\% =$

$(100 + p)$ Mark

und der künftige Wert der Geldeinheit nach 1 Jahre bei $p\,\% =$

$$\frac{100 + p}{100}$$

nämlich irgend ein gemischter oder echter Dezimalbruch oder ein solcher gewöhnlicher Bruch, der sich in einen Dezimalbruch verwandeln lässt, so hat man an Stelle von p jenen Dezimalbruch mit Weglassung des Kommas zu setzen; hiernach erhält man:

$$1{,}0p = 1{,}045, \text{ bezw.} = 1{,}035, \text{ bezw.} = 1{,}0025, \text{ bezw.} = 1{,}002 \text{ etc.,}$$

denn man kann für:

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100+4{,}5}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100+3{,}5}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100+0{,}25}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100+0{,}2}{100}$$

gesetzt denken (siehe Antwort der Frage 5) aus welchen Gleichungen sich ergibt:

$$1{,}0p = \frac{1{,}0p}{100}, \text{ bezw.} = \frac{104{,}5}{100}, \text{ bezw.} = \frac{103{,}5}{100}, \frac{100{,}25}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100{,}2}{100} \text{ oder:}$$

$$1{,}0p = 1{,}0p, \text{ bezw.} = 1{,}045, \text{ bezw.} = 1{,}035, \text{ bezw.} = 1{,}0025, \text{ bezw.} = 1{,}002$$

Beispiel 3.

Ist z. B.:

$$p = 2\tfrac{1}{3}\,\%, \text{ bezw.} = \tfrac{1}{7} \text{ etc.,}$$

nämlich irgend ein gemischter oder echter Bruch, der sich nicht in einen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt, so hat man für

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100+2\frac{1}{3}}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100+\frac{1}{7}}{100}$$

zu setzen und die erhaltenen Quotienten zu reduzieren. Man erhält:

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100}, \text{ bezw.} = \frac{102\frac{1}{3}}{100}, \text{ bezw.} = \frac{100\frac{1}{7}}{100}$$

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100}, \text{ bezw.} = \frac{307}{300}, \text{ bezw.} = \frac{701}{700}$$

und diese Quotienten müssen im Verlauf der weiteren Rechnung benutzt werden.

Erkl. 10. In diesem Buche ist zur allgemeinen Bezeichnung des Zinsfaktors:

$$\frac{100+p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$$

das allgemeine Zeichen „q“ eingeführt.

Somit ist der gesuchte Zinsfaktor $= \frac{100+p}{100}$. Der Ausdruck $\frac{100+p}{100}$ lässt sich auch schreiben:

$$\frac{100}{100} + \frac{p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$$

(siehe Erkl. 9.)

Für den Zinsfaktor ergeben sich hiernach folgende Ausdrücke:

$$\text{Zinsfaktor:} = \frac{100+p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$$

welche je nach der betreffenden Aufgabe ihre Verwendung finden (siehe Erkl. 10).

Frage 6. In was besteht das Wesen der „zusammengesetzten Zinsrechnung“ oder der sogenannten „Zinseszinsrechnung“?

Antwort. Das Wesen der zusammengesetzten Zinsrechnung oder der sogenannten Zinseszinsrechnung besteht darin, dass die Zinsen eines

Erkl. 11. Oft kommt es auch vor, dass die weitere Verzinsung der jährlichen Zinsen des ausgeliehenen Kapitals zu einem niedrigeren Zinsfuss als die des Hauptkapitals geschieht (siehe Aufgabe 76, Seite 119).

Erkl. 11a. Werden die Zinsen, wie bei der Zinseszinsrechnung, immer wieder nutzbringend zum Kapital geschlagen, so nennt man dies „kapitalisieren" der Zinsen.

Kapitals nicht erhoben, sondern an den Zeitabschnitten (Terminen), an welchen sie eigentlich fällig wären, zum Kapitale geschlagen und mit diesem weiter verzinst werden (siehe Erkl. 11).

Erkl. 11b. Die Theorie der Zinseszinsrechnung hat ihren grössten Fortschritt *Leibnitz* zu verdanken, welcher den Grundgedanken der Zinseszinsrechnung in den actis Eruditorum, Leipzig 1683, veröffentlichte.

Frage 7. Bei welchen weiteren Berechnungen kommt die Zinseszinsrechnung in Anwendung?

Antwort. Die Zinseszins-Rechnung kommt ausser in finanziellen und merkantilischen, auch in ökonomischen Fächern, nämlich überall da in Anwendung, wo es sich um die Berechnung des Zuwachses von Dingen handelt, welche sich in analoger Weise, wie in voriger Antwort angegeben, vermehren oder vermindern; wie z. B. die Zuwachsberechnungen von Völkern, Städtebewohnern, Wäldern etc.

Erkl. 12. Die Zinseszinsen heissen in der Rechtskunde: „Anatocismus." In den meisten Ländern ist es verboten, Zinseszinsen zu nehmen und wird als Zinswucher bestraft, kommen aber bei der Berechnung von Renten, von den verschiedenartigsten Versicherungen etc. vor. — In Deutschland ist jenes Verbot teilweise aufgehoben, indem bestimmt wurde, dass im kaufmännischen Contocorrent-Geschäft, wo das Anrechnen von Zinseszinsen gegenseitig geschieht, gestattet ist. Von Zinseszinsen kann eigentlich nur da die Rede sein, wo für die weitere nutzbringende Anlage eingenommener Zinsen sogleich wieder Gelegenheit vorhanden ist, wie in grösseren Kreditanstalten und Sparkassen, etc.

Erkl. 13. Unter „Contocorrent" (franz. *Compte courant*, engl. *Account current*) versteht man die fortlaufende Rechnung, die man mit einem (meistens auswärtigen) Geschäftsfreunde führt, sowie der abgeschlossene Auszug derselben aus den Handlungsbüchern mit gegenseitiger Zinsberechnung, aus welchen man den Saldo ersieht.

Erkl. 14. Unter „Saldo" (v. ital.) versteht man im allgemeinen den Rest, den jemand einem anderen, mit dem er in Rechnung steht, schuldig ist. Er ergibt sich aus dem Unterschied des Guthabens und der Forderung an jenen Dritten.

B. Entwicklung der Zinseszinsformeln nebst diesbezüglichen Aufgaben.

1). Entwicklung der Hauptzinseszinsformel.

Frage 8. Wie heisst die Hauptzinseszinsformel und wie wird dieselbe hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert eines Kapitals k, welches n Jahre lang auf Zinseszinsen zu p %$_0$ steht, mit K, so heisst die Hauptzinseszinsformel:

Formel 1 $K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ oder:

Formel 1a. $K = k \cdot 1{,}0p^n$

oder nach der Erkl. 10 für $\frac{100+p}{100}$ das Zeichen q gesetzt:

Formel 1b. $K = k \, . \, q^n$

Diese Formeln können auf folgende Weise hergeleitet werden:

Der künftige Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ ist nach Verlauf eines jeden Jahres $= \frac{100+p}{100}$ = dem Zinsfaktor q (siehe Antw. der Frage 5, Erkl. 10).

Hiernach wächst eine Geldeinheit, die Mark (siehe Erkl. 8) bei $p\,\%$ bis zu Ende des 1. Jahres an zu q Mark.

Diese q Mark stehen nun das 2. Jahr auf Zinsen. Bis zu Ende des 2. Jahres wächst die Mark wiederum an zu q Mark, mithin wachsen jene q Mark an zu $q \, . \, q = q^2$ Mark. Dies ist der künftige Wert der Geldeinheit, der Mark, bis zu Ende des 2. Jahres.

Diese q^2 Mark stehen nun das 3. Jahr auf Zinsen. Bis zu Ende des 3. Jahres wächst die Mark wiederum an zu q Mark, mithin wachsen jene q^2 Mark an zu $q^2 . \, q = q^3$ Mark, und dies ist der künftige Wert der Geldeinheit, der Mark, bis zu Ende des 3. Jahres, u. s. f.

Setzt man diese Betrachtung fort, so findet man allgemein für den künftigen Wert der Geldeinheit nach n Jahren $= q^n$.

Der künftige Wert K der k Geldeinheiten nach n Jahren zu dem Prozentsatze p ist somit $= k \, . \, q^n$ und man hat obige Formel 1b:

$$K = k \, . \, q^n$$

setzt man in derselben für q den Wert $1{,}0p$ oder $\frac{100+p}{100}$, so erhält man vorstehende Formeln 1 und 1a.

Erkl. 15. Je nach der gestellten Aufgabe wird man zur bequemen Berechnung eine der Formeln unter 1, 1a und 1b wählen.

Dem Gedächtnisse prägt sich am leichtesten die Formel 1b: $K = k \, . \, q^n$ ein, nur hat man stets dabei zu beachten, dass $q = \frac{100+p}{100} = 1{,}0p$ gesetzt werden muss.

Erkl. 16. Ist n, nämlich die Anzahl der Jahre, eine gebrochene Zahl, so beachte man die in dem Abschnitt 7). entwickelte Formel 18.

Erkl. 17. In nebenstehend entwickelter Hauptzinseszinsformel 1 können drei der Grössen: K, k, n und p gegeben, die vierte Grösse gesucht sein; somit können mittelst dieser Formel folgende 4 Fragen durch Rechnung beantwortet werden:

a). Wie hoch wächst ein Kapital bei gegebenem Zinsfuss in einer gewissen Zeit mit Zinseszinsen an?

b). Wie gross war das Kapital, welches in einer bestimmten Zeit zu einem gewissen Zinsfuss ausgeliehen war und mit seinen Zinseszinsen zu einem bestimmten Betrage angewachsen ist?

c). In welcher Zeit wächst ein bestimmtes Kapital zu einer bestimmten Höhe mit seinen Zinseszinsen an? und

d). Zu welchem Zinsfuss muss eine gewisse gewisse Zeit lang ein Kapital ausgeliehen werden, wenn es mit seinen Zinseszinsen zu einer bestimmten Summe anwachsen soll?

Erkl. 17a. Ist in der Zinseszinsformel Nr. 1 K gesucht, so beachte man, dass nebenstehende Frage a). auch in folgender Form gestellt werden kann:

„Welches ist der künftige oder Endwert eines Kapitals, welches zu einem bestimmten Zinsfuss eine bestimmte Zeit lang auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?“

Erkl. 17b. Ist in der Zinseszinsformel Nr. 1 k gesucht, so beachte man, dass nebenstehende Frage b). auch in folgender Form gestellt werden kann:

„Welches ist der jetzige, gegenwärtige oder bare Wert eines Kapitals, welches bei einem bestimmten Zinsfuss in einer bestimmten Zeit mit seinen Zinseszinsen eine bestimmte Höhe erreichen wird?“

Erkl. 18. Die Bezeichnungen: Endkapital und Endwert oder künftiger Wert für K, ebenso die Bezeichnungen: Anfangskapital und jetziger, gegenwärtiger oder barer Wert für k sind im allgemeinen bezüglich gleichbedeutend (siehe die Erkl. 17a und b und die Erkl. 17).

Gelöste Aufgaben.

Anmerkung 1. In Betreff der zur Lösung der Aufgaben benutzten Formeln siehe man die am Schlusse des Buches beigefügte Formelntabelle.

Aufgabe 1. Ein Kapital von 2500 ℳ steht zu 4 % auf Zinsen. Zu welcher Summe wächst dasselbe mit den Zinsen und Zinseszinsen in 30 Jahren an?

Formel 1ª: $K = k\,.\,1{,}0p^n$
(siehe Anmerk. 1)

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 2500$
die Anzahl der Jahre $n = 30$
der Prozentsatz $p = 4$
} gegeben,

und das Endkapital $K = x$ gesucht.

Mit Benutzung obiger Formel, ist:

$$1).\ \ldots\ x = 2500\,.\,1{,}04^{30}$$ (siehe Erkl. 9)

Zur Berechnung von x beachte man die Erklärungen 19—21.

Auf logarithmischem Wege erhält man aus Gleichung 1).:

$$log\ x = log\ 2500 + 30\,.\,log\ 1{,}04$$

Nun ist: $log\ 2500 = 3{,}3979400$
$+ 30\,.\,log\ 1{,}04 = 0{,}5109990$ (Hülfsr.)
$log\ x = 3{,}9089390$
9352
38
37,1
0,9

$num\ log\ x = 81084$
$+ 07$
$8108{,}47$

Das ausstehende Kapital ist hiernach mit seinen Zinsen und Zinseszinsen angewachsen zu:

$$x = K = 8108{,}47 \text{ ℳ}$$
$$= 8108 \text{ ℳ } 47 \text{ ₰}$$

Erkl. 19. Die numerische Berechnung der Aufgaben, in welchen die Grössen K oder k gesucht sind, siehe z. B. die Aufgaben 1 und 2, lassen sich auch ohne Anwendung der Logarithmen lösen (siehe die Erkl. 23ª und 26) und zwar entweder durch fortgesetzte Multiplikation (siehe z. B. die Gleich. 1 in der Lösung der Aufgabe 1) oder durch Benutzung der am Schlusse des Buches beigefügten Hülfstafel I, in welcher die mittelst 10stelligen Logarithmen berechneten wahren Werte der Potenzen aller möglichen Zinsfaktore ($1{,}0p^n$) enthalten sind (siehe auch die Erkl. 20—22).

Erkl. 20. In nebenstehender Auflösung ist die Berechnung des gesuchten Endkapitals auf logarithmischem Wege ausgeführt, hierbei können auch die Logarithmen der betreffenden Zinsfaktore ($1{,}0p^n$) aus der am Schlusse des Buches beigefügten Hülfstafel II entnommen werden.

Erkl. 21. Bei Ausrechnung von Zinseszinsrechnungen etc. wendet man am besten, besonders für die Bestimmung des Logarithmus des Zinsfaktors ($1{,}0p^n$) siebenstellige, und wenn n eine sehr grosse Zahl ist, noch mehrstellige Logarithmen an.
Am Schlusse des Buches sind die Logarithmen der am häufigsten vorkommenden Zinsfaktoren bis auf 10 Dezimalstellen angegeben.

Erkl. 22. In Kleyers 5stelliger Logarithmentafel sind auf den Seiten 23 und 24 die Logarithmen der Zahlen 10000 bis 11000 bis auf 7 Dezimalstellen angegeben, um mittelst derselben einen entsprechenden genauen Wert für die Logarithmen der Zinsfaktoren zu erhalten.

Hülfsrechnung.

$log\ 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,30$
$30\,.\,log\ 1{,}04 = 0{,}5109990$

Aufgabe 2. Ein Kapital, am 1. April 1850 zu 3½ % ausgeliehen, wurde am 1. April 1879 mit 42875 ℳ zurückbezahlt. Wie gross war das ausgeliehene Kapital?

Formel 1ª: $K = k\,.\,1{,}0p^n$
(siehe Anmerk. 1)

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

das Endkapital $K = 42875$
der Prozentsatz $p = 3\frac{1}{2}$
die Anz. d. Jahre $n = 1879 - 1850 = 29$
} gegeben

und das Anfangskapital $k = x$ gesucht.

Mit Benutzung vorsteh. Formel, ist:

$$42875 = x \,.\, 1{,}035^{29} \quad \text{(siehe Erkl. 9, Beisp. 2)}$$

Hieraus erhält man:

$$x \,.\, 1{,}035^{29} = 42875 \quad \text{oder:}$$

$$1). \;.\;.\; x = \frac{42875}{1{,}035^{29}}$$

Zur Berechnung von x beachte man die Erkl. 21.

Auf logarithmischem Wege erhält man aus Gleichung 1).:

$$log\, x = log\, 42875 - 29 \,.\, log\, 1{,}035$$

Nun ist: $log\, 42875 = 4{,}6322041$
$-29 \,.\, log\, 1{,}035 = -0{,}4332687$ (Hülfsr.)
$log\, x = 4{,}1989354$

	9319
	35
$num\, log\, x = 15810$	27,4
$+01$	7,6
$+002$	5,48
$num\, log\, x = 15810{,}12$	

Das ausgeliehene Kapital k ($= x$) war somit $= 15810{,}12$ ℳ
$= 15810$ ℳ 12 ₰.

Erkl. 22a. In der Aufgabe 2 wurde nach der im bürgerlichen Rechnungswesen gebräuchlichen Redeweise der „bare Wert" (oder auch der „diskontierte Wert", siehe Erkl. 30) eines später fälligen Kapitals gesucht.

In der Aufgabe 1 wurde der „künftige Wert" eines sofort fälligen (zahlbaren) Kapitals gesucht (siehe die Erkl. 18).

Hülfsrechnung.

$log\, 1{,}035 = 0{,}0149403$
$.\,29$
1344627
298806
$29 \,.\, log\, 1{,}035 = 0{,}4332687$

Aufgabe 3. Es hat Jemand 3750 ℳ und will dieselben, eines bestimmten Zweckes wegen, erst dann in Angriff nehmen, wenn sie zu 9949,87 ℳ angewachsen sind. Wann kann dies geschehen, wenn das Kapital zu 5 % auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?

Formel 1a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$
(siehe Anmerk. 1)

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:
das Anfangskapital $k = 3750$ }
das Endkapital $K = 9949{,}87$ } gegeben,
der Prozentsatz $p = 5$ }
die Anzahl der Jahre $n = x$ gesucht.

Mit Benutzung vorsteh. Formel ist:

$$1). \;.\;.\; 9949{,}87 = 3750 \,.\, 1{,}05^x$$

Hieraus erhält man:

$$3750 \,.\, 1{,}05^x = 9949{,}87 \quad \text{oder:}$$

$$2). \;.\;.\; 1{,}05^x = \frac{9949{,}87}{3750}$$

Dies ist eine Exponentialgleichung, welche zur Bestimmung von x logarithmiert werden muss (siehe Erkl. 23 u. 23a). Man erhält:

$$x \,.\, log\, 1{,}05 = log\, 9949{,}87 - log\, 3750$$

mithin:

$$x = \frac{log\, 9949{,}87 - log\, 3750}{log\, 1{,}05}$$

Erkl. 23. Erscheint die Unbekannte, wie in nebenstehender Gleich. 1), als Exponent einer Potenz, so heisst eine solche Gleichung „Exponentialgleichung." Um solche Gleichungen aufzulösen, betrachte man die ganze Potenz, in welcher die Unbekannte als Exponent vorkommt, zunächst als Unbekannte; löse nach dieser auf (siehe Gleich. 2) und logarithmiere alsdann, wodurch die Unbekannte als Faktor erscheint und weiter bestimmt werden kann.

Erkl. 23a. Die Berechnung der gesuchten Anzahl der Jahre, wie lange ein gegebenes Kapital zu einem gewissen Zinsfuss stehen muss, um mit seinen Zinsen und Zinseszinsen zu einer bestimmten Summe anzuwachsen, kann nicht mehr ohne Logarithmen geschehen (siehe die Erklärungen 19—22).

Nun ist: $log\, 9949{,}87 = 3{,}9978144$
$+ 30{,}1$
$3{,}9978174$

$- log\, 3750 = -3{,}5740313$

$log\, 9949{,}87 - log\, 3750 = 0{,}4237861$

ferner ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$

mithin: $x = \frac{0{,}4237861}{0{,}0211893}$

Anstatt nun diese angedeutete Division auszuführen, logarithmiere man nochmals; man erhält:

$$log\, x = log\, 0{,}4237861 - log\, 0{,}0211893$$

Nun ist:

$log\, 0{,}4237861 = 0{,}6271405$
$+ 61{,}2$
$1{,}02$
$0{,}6271467 - 1$ (Erkl. 24)

$- log\, 0{,}0211893 = 0{,}3261167 - 2$ (Hülfsr.)
$- \quad +$

mithin: $log\, x = 1{,}3010300$

und: $num\, log\, x = 20$

Nach 20 Jahren kann also das Kapital zu dem gedachten Zwecke in Angriff genommen werden.

Erkl. 24. Der *log* einer Zahl mit 0 Ganzen hat eine negative Kennziffer, und zwar mit so vielen Einheiten, als direkt vor und hinter dem Komma Stellen mit Nullen besetzt sind (siehe Kleyer's Lehrbuch der Logarithmen).

Hülfsrechnung.

$log\, 0{,}0211893 = 0{,}3261105$ (Erkl. 24)
$+ 61{,}5$
$0{,}3261167 - 2$

Aufgabe 4. Ein Kapital von 4200 ℳ, welches vor 25 Jahren in eine Sparkasse eingezahlt wurde, beträgt jetzt 14222,69 ℳ. Zu wieviel % (Prozent = pCt.) verzinste die Sparkasse dies eingelegte Kapital?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$
(siehe Anmerk. 1)

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 4200$
das Endkapital $K = 14222{,}69$ } gegeben,
die Anzahl der Jahre $n = 25$

der Prozentsatz $p = x$ gesucht.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man:

$$14222{,}69 = 4200 \,.\, 1{,}0x^{25}$$

oder: $$4200 \,.\, 1{,}0x^{25} = 14222{,}69$$

$$1{,}0x^{25} = \frac{14222{,}69}{4200}$$

Beiderseits die 25. Wurzel ausgezogen, gibt:

$$1{,}0x = \sqrt[25]{\frac{14222{,}69}{4200}}$$

Nunmehr berechne man zunächst die Grösse $1{,}0x$ (siehe die Erkl. 25 und 26). Zu diesem Zweck logarithmiere man die Gleichung, wonach sich ergibt:

$$log\, 1{,}0x = \frac{1}{25}\,[log\, 14222{,}69 - log\, 4200]$$

Erkl. 25. Da in dieser Aufgabe die Unbekannte x ein Glied der Grösse $1{,}0x$ ist, so betrachte man diese Grösse $1{,}0x$ als die Unbekannte. Löse hiernach die gegebene Gleichung auf und beachte, dass $1{,}0x = \frac{100 + x}{100}$ ist.

Erkl. 26. Die Berechnung der gesuchten Prozente, zu welchen ein gegebenes Kapital eine gewisse Anzahl Jahre ausgeliehen werden muss, um mit seinen Zinsen und Zinseszinsen zu einer bestimmten Summe anzuwachsen, ist ohne Anwendung der Logarithmen eine höchst mühsame, da grösstenteils höhere Wurzeln auszuziehen sind, die unter Umständen Tage lange Arbeit beanspruchen würden (siehe die Erklärungen 19—23ª).

Nun ist: $log\ 14222{,}69 = 4{,}1529607$
$+183$
$27{,}45$
$4{,}1529817$
$-log\ 4200 = -3{,}6232493$
$log\ 14222{,}69 - log\ 4200 = 0{,}5297324$

mithin: $log\ 1{,}0x = \frac{1}{25} \cdot 0{,}5297324$ (Hülfsr.)

oder: $log\ 1{,}0x = 0{,}0211893$

folglich: $num\,log\ 1{,}0x = 1{,}050$

Hülfsrechnung.

```
25 | 0,5297324 | 0,0211893
      50
      ---
       29
       25
       ---
        47
        25
        ---
        223
        200
        ---
         232
         225
         ---
          74
          75
```

Für $1{,}0x$ den Wert $\frac{100+x}{100}$ gesetzt, gibt:

$$\frac{100+x}{100} = 1{,}05$$

$$100 + x = 105$$

$$x = 5$$

Hiernach verzinste die Sparkasse das Kapital zu 5 %.

Anmerkung 2. In weiterem sind die Aufgaben, deren numerische Berechnung auch ohne Anwendung der Logarithmen, nämlich mit Hülfe der am Schlusse dieses Buches beigegebenen Hülfstafel I ausgeführt werden können, mit einem Sternchen *). bezeichnet. In diesem Buche selbst ist alles mit Logarithmen berechnet.

*). **Aufgabe 5.** Am 15. Septbr. 1880 wurde der Holzbestand zweier Gemeindewälder als gleich gross befunden. Wenn nun der Bestand des 1ten Waldes vor 7 Jahren 8425 kbm betrug und jährlich um 5 % zugenommen hat; wie gross war hiernach der Bestand des 2ten Waldes vor 8 Jahren, wenn derselbe von da ab $4\frac{1}{2}$ % jährlichen Zuwachs hatte?

Formel 1a: $K = k \cdot 1{,}0p^n$
(siehe Anmerk. 1.)

Erkl. 27. Diese und ähnliche Aufgaben werden mit der Zinseszinsformel gelöst, da der jährliche Zuwachs jedes Jahr ebenfalls wächst; ähnlich wie Zinsen, die sich immer wieder verzinsen.

Erkl. 28. Unter Holzbestand eines Waldes versteht man die Menge des Holzes, in Kubikmeter (= kbm) ausgedrückt.

Auflösung. Nach der Aufgabe sind die Holzbestände beider Wälder am 15. Septbr. 1880 gleich, und hierin besteht der Sinn der anzusetzenden Gleichung.

Für den 1ten Wald ist:

der Anfangsbestand $k = 8425$ kbm
der jährliche Zuwachs $p = 5$
die Anzahl der Jahre $n = 7$
} gegeben;

Für den 2. Wald ist:

der Anfangsbestand $k = x$ kbm gesucht und
der jährliche Zuwachs $p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$
die Anzahl der Jahre $n = 8$
} gegeben.

Die Endbestände K beider Wälder sind einander gleich.

Sonach ergibt sich mit doppelter Benutzung obiger Formel die Gleichung:

$$x \cdot 1{,}045^8 = 8425 \cdot 1{,}05^7$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{8425 \cdot 1{,}05^7}{1{,}045^8}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\,x = log\,8425 + 7 \cdot log\,1{,}05 - log\,1{,}045$$

Hülfsrechnung.

1). $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\cdot 7$
$7 . \log 1{,}05 = 0{,}1483251$

und

2). $\log 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\cdot 8$
$8 . \log 1{,}045 = 0{,}1529304$

Nun ist: $\log 8425 = 3{,}9255699$
$+ 7 . \log 1{,}05 = 0{,}1483251$ (Hülfsr. 1)
$4{,}0738950$
$- 8 . \log 1{,}045 = -0{,}1529304$ (Hülfsr. 2)
folglich: $\log x = 3{,}9209646$
9629
17
mithin: 15,6
$num \log x = 8336{,}13$ kbm.

Der Holzbestand des 2[ten] Waldes war somit am 15. Sept. 1880 = 8336,13 kbm.

*). **Aufgabe 6.** Auf eine zum Verkauf ausgebotene Liegenschaft bietet A 40000 ℳ bar, B bietet 32000 ℳ bar und nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar 8500 ℳ; C dagegen bietet 33000 ℳ bar und 10000 ℳ nach 6 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Welches von diesen drei Angeboten ist das höchste, wenn 5 % Zinseszinsen der Berechnung zu Grunde gelegt werden?

Erkl. 29. Unter dem „baren Werte" k eines Kapitals K, welches nach n Jahren ohne Zinsen zahlbar ist, versteht man den gegenwärtigen Wert jenes Kapitals K (siehe Erkl. 18), nämlich diejenige Summe k, welche zu einem gewissen Zinsfuss p sofort auf Zinseszinsen ausgeliehen, nach n Jahren zu jenem Kapital K anwachsen wird.

Aus der Formel: $K = k . 1{,}0p^n$ erhält man für den baren Wert k:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

Hülfsrechnung 1.

Den Quotienten $\frac{8500}{1{,}05^3}$ logarithmisch berechnet, erhält man:

$$\log \frac{8500}{1{,}05^3} = \log 8500 - 3 . \log 1{,}05$$

nun ist: $\log 8500 = 3{,}9294189$
$-3 . \log 1{,}05 = -3 . 0{,}0211893 = 0{,}0635679$

folglich: $\log \frac{8500}{1{,}05^3} = 3{,}8658510$
8499
und $\frac{8500}{1{,}05^3} = 7342{,}62$ 11
11,8

Hülfsrechnung 2.

Den Quotienten $\frac{1000}{1{,}05^6}$ logarithmisch berechnet, gibt:

$$\log \frac{10000}{1{,}05^6} = \log 10000 - 6 . \log 1{,}05$$

nun ist: $\log 10000 = 4{,}0000000$
$-6 . \log 1{,}05 = -6 . 0{,}211893 = -0{,}1271358$

folglich: $\log \frac{10000}{1{,}05^6} = 3{,}8728642$
8611
und $\frac{10000}{1{,}05^6} = 7462{,}15$ 31
29

Formel 1[a]: $K = k . 1{,}0p^n$
(siehe Anmerk. 1.)

Auflösung. Um zu untersuchen, ob A, B oder C das grösste Angebot gemacht hat, ist es nötig, die sogenannten „baren Werte" (siehe Erkl. 29) der einzelnen Angebote zu bestimmen; alsdann kann man durch Vergleichung dieser gefundenen baren Werte untersuchen, wer das höchste Angebot gemacht hat.

Nun ist:

1). der bare Wert des Angebots von A
= 40 000 ℳ

2). der bare Wert des Angebots von B
$= 32\,000 + \frac{8500}{1{,}05^3}$ (siehe Erkl. 29)

oder nach der Hülfsrechn. 1:

= 32 000 + 7342,62 = 39342,62 ℳ

und

3). der bare Wert des Angebots von C
$= 33000 + \frac{10000}{1{,}05^6}$ (siehe Erkl. 29)

oder nach der Hülfsrechn. 2:

= 33000 + 7462,15 = 40462,15 ℳ

Es bot also A, bar 40000 ℳ
„ „ „ B, „ 39342,62 „
„ „ „ C, „ 40462,15 „

woraus sich ergibt, dass das Angebot des C das höchste ist.

*). **Aufgabe 7.** A schuldet B eine gewisse Summe, zahlbar nach 8 Jahren; nun will aber A diese Schuld sofort bar abtragen und zahlt dem B gleich 5991,66 ℳ. Wie viel war A dem B schuldig, wenn B dem A 4 % Diskonto bewilligt hat?

Erkl. 30. Den Abzug, welchen sich ein Gläubiger bei Früherzahlung einer Schuld gefallen lassen muss, nennt man „Interusurium“ (v. lat., d. h. der Unterschied zwischen dem zukünftigen Wert K eines Kapitals und dem baren, jetzigen, ursprünglichen Wert k) oder auch „Diskont“ (Disconto, franz. Escompte, engl. Discount, ital. Sconto). Der Abzug auf Zahlungen, welche früher geleistet werden, als sie fällig sind, findet besonders bei Wechseln, bei Zahlungen für empfangene Waren etc. statt.

Wie die Berechnung oder sogenannte „Diskontierung“ auszuführen ist, das lehrt die Diskontorechnung, welche sich in Betreff der erforderlichen Zinsberechnung auf verschiedene Ansichten stützt. Die zwei gebräuchlichsten Methoden, nach welchen die Diskontorechnung ausgeführt wird, sind:

1). die Hoffmann'sche Methode (das Hoffmann'sche Interusurium); dieselbe besteht darin, dass ein Kapital gesucht wird, welches mitsamt den einfachen Zinsen, die es in der Zeit, in der es früher als die betreffende Schuld gezahlt wird, trägt, gleich jenem zu zahlenden Kapitale wird, und

2). die Leibnitz'sche Methode (das Leibnitz'sche Interusurium); dieselbe besteht darin, dass wie bei der Hoffmann'schen Methode ein Kapital gesucht wird, welches aber mitsamt seinen Zinseszinsen, die es in der Zeit, in der es früher als die betreffende Schuld gezahlt wird, trägt, gleich jenem zu zahlenden Kapitale wird.

Von diesen 2 Methoden ist nur die Leibnitz'sche Methode mathematisch richtig, was im Anhang des I. Teils bewiesen wird, und ist dieselbe in Preussen gesetzlich anerkannt.

Die Hoffmann'sche Methode lässt sich dadurch rechtfertigen, dass der Gläubiger nicht zu jeder Stunde Gelegenheit hat, das betreffende Kapital wieder auszuleihen, dies sind jedoch Sachen des Gläubigers, was den Schuldner im Grunde genommen nichts angehen kann.

Erkl. 31. Die Berechnung des Interusuriums, Diskontos, ist in diesem Buche stets nach der Leibnitz'schen Methode, also mittelst der Theorie der Zinseszinsrechnung ausgeführt. — In *Kleyer*'s Rechenbücher ist die Berechnung des Interusuriums und Diskontos nach der Hoffmann'schen Methode, also mittelst der Theorie der einfachen Zinsrechnung enthalten.

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

(siehe Anmerk. 1)

Auflösung. Der Aufgabe gemäss ist die Barzahlung, die A dem B macht, = 5991,66 Mark. Nun wird nach der *Leibnitz*'schen Methode (siehe Erkl. 31) angenommen, dass B diese erhaltenen 5991,66 Mark sofort auf Zinseszinsen anlegt und zwar zu demselben Prozentsatze (4 %), wie der von ihm bewilligte Diskont, und dass dann dieses Kapital nach Ablauf von 8 Jahren mit seinen Zinsen und Zinseszinsen zu der Summe angewachsen ist, welche A dem B schuldet.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man daher, wenn für:

$$k = 5991{,}66$$
$$p = 4$$
$$n = 8$$
$$K = x$$

gesetzt wird:

1). . . $x = 5991{,}66 \,.\, 1{,}04^8$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 5991{,}66 + 8 \,.\, \log 1{,}04$$

Nun ist: $\log 5991{,}66 = 3{,}7775428$
$+ 43{,}8$
$3{,}7775472$
$+ 8 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}1362664$ (Hülfsr.)

folglich: $\log x = 3{,}9138136$
8086
50
$47{,}7$

hieraus:
$num \log x = 8199{,}99$

Die Summe, die A dem B schuldet, ist somit abgerundet = 8200 ℳ.

Hülfsrechnung.

$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,8$

$8 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}1362664$

Aufgabe 8. Die Bevölkerung eines Staates wurde im J. 1850 zu 38000000 Personen abgeschätzt. Im Jahre 1880 zählte die Bevölkerung desselben Staates 92235800 Personen; wie gross war der Zuwachs?

Erkl. 32. Diese und ähnliche Aufgaben werden wie Zinseszins-Rechnungen gelöst, da sich hier der jährliche Zuwachs wieder vermehrt; ähnlich wie die Zinsen, die sich wieder verzinsen.

Erkl. 33. Unter Zuwachs ist bei diesen und ähnlichen Aufgaben der Zuwachs für 100 zu verstehen, nämlich der Prozentsatz p.

Erkl. 34. Der Zuwachs einer Bevölkerung kann durch eigene Vermehrung und auch durch Zuzug entstehen.

Formel 1a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

(siehe Anmerk. 1)

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

die Zahl d. Pers. zu Anf.: $k = 38000000$ } gegeben
" " " " " Ende: $K = 92235800$ } gegeben
" Anzahl der Jahre: $n = 1880 - 1850 = 30$ } gegeben
der Prozentsatz: $p = x$ gesucht.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man somit:

1). . $92235800 = 38000000 \,.\, 1{,}0x^{30}$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Reihe nach:

$$380000 \,.\, 1{,}0x^{30} = 922358$$

$$1{,}0x^{30} = \frac{922358}{380000} \text{ oder:}$$

$$1{,}0x = \sqrt[30]{\frac{922358}{380000}}$$ (siehe Erkl. 25, Seite 8)

Diese Gleichung logarithmiert, erhält man:

$$log\, 1{,}0x = \frac{1}{30}\,[log\, 922358 - log\, 38000]$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist: } log\, 922358 &= \quad 5{,}9648958 \\ &\qquad + 37{,}6 \\ &\quad 5{,}9648996 \\ - log\, 380000 &= -5{,}5797836 \\ \text{folglich: } log\, 1{,}0x &= \frac{1}{30} \cdot 0{,}3851160 \\ \text{oder: } log\, 1{,}0x &= 0{,}0128372 \\ \text{mithin: } num\, log\, 1{,}0x &= 1{,}030, \text{ d. h.:} \\ \frac{100 + x}{100} &= 1{,}030 \\ 100 + x &= 1{,}030 \\ x &= 103{,}0 - 100 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Der jährliche Zuwachs beträgt hiernach 3 %.

Anmerkung 3. Weitere diesbezügliche gelöste Aufgaben auch über Forstwissenschaft, über Städtebevölkerung, Barwerte und speziell über die Diskontorechnung findet man in dem Abschnitt C. unter 1).; analoge ungelöste Aufgaben findet man in dem Abschnitt C. unter 2)., und auch in dem Kapitel: Die Rentenrechnung.

2). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn sich ein Kapital ver-m-fachen soll.

Frage 9. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn sich ein zu p % ausgeliehenes Kapital k nach einer gewissen Reihe von Jahren, nach n Jahren, ver-m-fachen soll, und wie wird dieselbe hergeleitet?

Antwort. Soll sich ein Kapital k nach einer gewissen Reihe von Jahren, nach n Jahren, bei p % mit seinen Zinsen und Zinseszinsen ver-m-fachen, so heisst die diesbezügliche Zinseszinsformel:

Formel 2 $m = 1{,}0p^n$

oder auch, für $1{,}0p$ das allgemeine Zeichen q gesetzt:

Formel 2^a. $m = q^n$

Diese Formel kann man, wie folgt, herleiten:

In der Hauptzinseszinsformel 1^a, S. 5:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

bedeutet k das ausgeliehene Kapital; dessen künftiger Wert K soll nunmehr $= m \,.\, k$ sein. Setzt man diesen Wert für $K = m \,.\, k$ in jene Formel ein, so erhält man:

$$m \,.\, k = k \,.\, 1{,}0p^n$$

oder durch Division die Grösse k entfernt:

$$m = 1{,}0p^n$$

und dies ist die erwähnte Formel 2.

Erkl. 35. In der Formel:

$$m = 1{,}0p^n$$

bedeutet p den Prozentsatz, n die Anzahl der Jahre und m die Zahl, welche angibt, wie oft sich das Kapital k vervielfältigen soll.

Da die Grösse k durch Division aus der Gleichung verschwunden ist, so deutet dies an, dass die Formel: $m = 1{,}0p^n$ ganz unabhängig von der Grösse des ausgeliehenen Kapitals ist. Hiernach wird sich jedes Kapital unter denselben Bedingungen ver-m-fachen.

Gelöste Aufgabe.

(Siehe Anmerk. 3, Seite 12.)

Aufgabe 9. Ein Kapital beträgt gegenwärtig 120 000 ℳ und ist zu 5 % auf Zinseszinsen ausgeliehen. Nach wieviel Jahren wird sich das Kapital verdoppelt haben?

Formel 2: $m = 1{,}0p^n$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

der Prozentsatz $p = 5$,
die Zahl, welche angibt, wie oftmal sich das Kapital vervielfältigen soll, nämlich $m = 2$
} gegeben,

und ist die Anzahl der Jahre $n = x$ gesucht.

Nach vorstehender Formel erhält man:

$$2 = 1{,}05^x \text{ oder:}$$

$$1{,}05^x = 2 \quad \text{(siehe Erkl. 23)}$$

logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, log\, 1{,}05 = log\, 2$$

hieraus:

Erkl. 36. Wie aus nebenstehender Auflösung ersichtlich, kommt es auf die Grösse des Kapitals nicht an. Jedes Kapital, welches zu 5 % auf Zinseszinsen ausgeliehen ist, wird sich nach Ablauf von 14 Jahren und ungefähr 2 Monaten verdoppeln (siehe Erkl. 35).

Erkl. 37. In Betreff der Berechnung der Bruchteile von Jahren beachte man, dass im bürgerlichen (kaufmännischen) Leben das Jahr zu 12 Monaten, der Monat zu 30 Tagen angenommen wird.

Erkl. 37a. Ist der Tag, bezw. der Datum zu bestimmen, an welchem z. B. ein Kapital fällig ist, so wird das Jahr zu 365 Tagen angenommen und dann zählt jeder Monat soviele Tage als ihm nach dem Kalender zukommen (siehe die Aufgabe 52, Seite 90).

Hülfsrechnung.

$$\begin{aligned} log\, 0{,}0211893 &= 0{,}3261105 \\ &\quad + 61{,}5 \\ \hline &\quad 0{,}3261167 - 2 \text{ (Erkl. 24)} \end{aligned}$$

$$x = \frac{log\, 2}{log\, 1{,}05}$$

$$x = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}$$

Anstatt diese Division auszuführen, kann man abermals logarithmieren; hiernach ist:

$$log\, x = log\, 0{,}3010300 - log\, 0{,}0211893$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 0{,}3010300 &= 0{,}4786098 - 1 \\ -log\, 0{,}0211893 &= 0{,}3261167 - 2 \text{ (Hülfsr.)} \\ &\quad - \qquad + \\ \hline log\, x &= 1{,}1524931 \\ &\quad 4718 \\ \hline &\quad 213 \\ &\quad 214{,}2 \end{aligned}$$

und

$$num\, log\, x = 14{,}2067$$

Es wird sich also nach 14,2067, bezw. nach $14\frac{2067}{10000}$, oder nach 14 Jahren und etwas mehr als 2 Monaten das Kapital verdoppelt haben.

3). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten zum Kapital geschlagen werden.

Frage 10. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten — z. B. in je $\frac{1}{m}$ Jahr — nutzbringend zum Kapital geschlagen werden und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Die Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten — z. B. in je $\frac{1}{m}$ Jahr — nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden, heisst:

Formel 3 $$K = k \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$$

oder, für $\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$ das Zeichen q_1 gesetzt:

Formel 3a $$K = k \cdot q_1^{m \cdot n}$$

Diese Formel kann, wie folgt hergeleitet werden:

Werden die Zinsen **nicht** jährlich, sondern nach Verlauf von je $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapitale geschlagen, so wird im **bürgerlichen Leben** (siehe Erkl. 38) der Zinsfuss für ein solches $\frac{1}{m}$ Jahr proportional diesem Bruchteile des Jahres angenommen.

Erkl. 38. Sollen die Zinsen in kleineren Abschnitten als einem Jahre — in Bruchteilen eines Jahres — nutzbringend zum Kapital geschlagen werden, so ist überall im **bürgerlichen Leben Gebrauch**, für einen solchen Jahresbruchteil **einen demselben proportionalen Zinsfuss** anzunehmen, welcher alsdann den besonderen Namen „**relativer** oder **konformer Zinsfuss**" führt. Diese Annahme ist jedoch **mathematisch unrichtig**, was im Abschnitt 6). bewiesen wird, nichtsdestoweniger gang und gebe.

Ist der Zinsfuss für 1 Jahr $= p$, so ist er hiernach für $\frac{1}{m}$ Jahr $= \frac{p}{m}$. Der Zinsfaktor q_1, das ist in diesem Falle der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ nach $\frac{1}{m}$ Jahr, ist somit $= \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$; denn: 100 Geldeinheiten wachsen nach $\frac{1}{m}$ Jahr bei $p\,\%$ an zu $100 + \frac{p}{m}$, mithin wächst 1 Geldeinheit nach $\frac{1}{m}$ Jahr bei $p\,\%$ an zu $\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$.

Ferner ist die Zahl der Zeitabschnitte, nach welchen die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden $= m \,.\, n$; denn: werden die Zinsen nach je $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapitale geschlagen, so sind dies in einem Jahre m Zeitabschnitte, mithin in n Jahren $= m \,.\, n$ solcher Zeitabschnitte.

In der Formel:

$$K = k \,.\, q^n$$

bedeutet in diesem Fall $q_1 = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$ und die Anzahl n der Zeitabschnitte $= m \,.\, n$

Diese Werte für q_1 und n in die Formel:

$$K = k \,.\, q_1^n$$

substituiert, gibt:

$$K = k \,.\, q_1^{m \cdot n} \quad \text{oder:}$$

$$K = k \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$$

und das sind die vorstehenden Formeln 3 und 3[a], in welchen m den Bruchteil des Jahres bedeutet, nach welchen die Zinsen zum Kapital geschlagen werden.

Gelöste Aufgabe.

(Siehe Anmerk. 3, Seite 12.)

*). **Aufgabe 10.** Wie gross ist ein Kapital, welches zu $4\frac{1}{2}\,\%$ auf Zinseszinsen ausgeliehen und nach 10 Jahren zu 16386,19 ℳ angewachsen ist, wenn die Zinsen monatlich zum Kapital geschlagen werden?

Formel 3: $K = k \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$

Auflösung. Da die Zinsen monatlich, also nach jedem zwölften Teile eines Jahres zum Kapital geschlagen werden, so wird der Prozentsatz 12 mal kleiner, die Anzahl der Zeitabschnitte 12 mal grösser.

Setzt man daher in vorstehender Formel

für das Endkapital $K = 16386{,}19$
„ die Anzahl der Jahre $n = 10$
„ den Prozentsatz $p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$
„ die Zahl der Bruchteile eines Jahres $m = 12$
und für das gesuchte Anfangskapital $k = x$,

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$16386{,}19 = x \cdot \left(\frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{12}}{100}\right)^{10 \cdot 12}$$

oder:

$$16386{,}19 = x \cdot \left(\frac{100 + 0{,}375}{100}\right)^{120} \text{ (Hülfsr. 1)}$$

und hieraus ergibt sich x, wie folgt:

$$x \cdot \left(\frac{100{,}375}{100}\right)^{120} = 16386{,}19$$

$$x \,.\, 1{,}00375^{120} = 16386{,}19 \text{ oder:}$$

$$x = \frac{16386{,}19}{1{,}00375^{120}}$$

Zur numerischen Berechnung von x logarithmiere man nunmehr diese Gleichung (siehe auch die Erkl. 19, Seite 4).

Man erhält:

$log\, x = log\, 16386{,}19 - 120 \,.\, log\, 1{,}00375$

Nun ist:

$log\, 16386{,}19 = 4{,}2144730$
$+ 26{,}5$
$23{,}85$
$4{,}2144780$
$- 120 \,.\, log\, 1{,}00375 = -0{,}1950720$ (Hülfsr. 2)
folglich: $log\, x = 4{,}0194060$
3656
404
373,5
30,5
29,0

und $num\, log\, x = 10456{,}97$

Das gesuchte Kapital x ist mithin, abgerundet $= 10457$ ℳ

Hülfsrechnungen.

1). $\frac{4\frac{1}{2}}{12} = \frac{4{,}5}{12} = 0{,}375$

2). $log\, 1{,}00375 = 0{,}0016039$
$+ 216{,}5$
$0{,}0016256$
$. 120$
325120
16256
$120 \,.\, log\, 1{,}00375 = 0{,}1950720$

4). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn **am Ende** eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe **vermehrt** wird.

Frage 11. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn ein Kapital k zu $p\,\%$ n Jahre lang auf Zinseszinsen steht und dabei am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summe r vermehrt wird, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Steht ein Kapital k zu $p\,\%$ n Jahre lang auf Zinseszinsen und wird dasselbe am Ende eines jeden Jahres um die Summe r vermehrt, so heisst, wenn man den künftigen Wert mit K bezeichnet, die diesbezügliche Zinseszinsformel:

Formel 4 $$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt:

Formel 4ª $$K = k \,.\, q^n + \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formel kann man auf folgende Weise herleiten:

Das auf Zinseszinsen stehende Kapital k (Anfangskapital) wächst bei $p\,\%$ bis zu Ende des 1. Jahres an, zu: $k\,q$, wenn man den Wert der Geldeinheit (Mark) bei $p\,\%$ nach Verlauf eines Jahres mit q bezeichnet, bezw. den Zinsfaktor q einführt (siehe Erkl. 39). Da nun am Ende eines jeden Jahres die Summe r zugelegt werden soll, so hat man am Ende des 1. Jahres die Summe:

$$k\,q + r$$

Diese $(k\,q + r)$ Mark wachsen, analog wie vorhin (siehe Erkl. 39), bis zu Ende des 2. Jahres an, zu: $(kq + r) \,.\, q$ und da zu dieser Zeit wiederum r Mark zugelegt werden, so hat man am Ende des zweiten Jahres die Summe:

$$(kq + r)\; q + r$$

oder:

$$kq^2 + rq + r$$

Diese Summe wächst bis zu Ende des dritten Jahres an, zu: $(kq^2 + rq + r) \,.\, q$ und da am Ende des dritten Jahres abermals die Summe r zugelegt wird, so hat man am Ende des dritten Jahres die Summe:

$$(kq^2 + rq + r)\; q + r$$

oder:

$$kq^3 + rq^2 + rq + r$$

Setzt man diese Betrachtung auf analoge Weise fort, so wird man für den künftigen Wert K des Kapitals k, welches auf Zinseszinsen steht und am Ende eines jeden Jahres

Erkl. 39. Nach der Definition des Zinsfaktors q (siehe Antw. der Frage 5, bezw. der Frage 4 der 1. Auflage) wächst bei $p\%$ 1 Mark bis zu Ende eines Jahres an, zu: $\frac{100 + p}{100} = q$ mithin wachsen k Mark nach Verlauf eines Jahres an, zu:

$$k \cdot \frac{100 + p}{100} = k \,.\, q$$

um die Summe r vermehrt wird, nach dem vierten Jahre:

$$K = kq^4 + rq^3 + rq^2 + rq + r$$

oder allgemein, am Ende des n^{ten} Jahres:

$$1). \dots K = kq^n + rq^{n-1} + rq^{n-2} + \dots + rq^2 + rq + r$$

finden.

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden, vom zweiten ab, eine geometrische Reihe (siehe Erkl. 40); fasst man diese Glieder zusammen und schreibt sie in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

$$2). \dots K = kq^n + (r + rq + rq^2 + \dots rq^{n-2} + rq^{n-1})$$

so ist sofort ersichtlich, dass das erste Glied der geometrischen Reihe in der Klammer $= r$, der Quotient dieser Reihe $= q$ und das letzte Glied derselben $= rq^{n-1}$ ist. Die Summe s sämtlicher Glieder dieser geometrischen Reihe kann man mittelst der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 41)}$$

berechnen, wenn man für das Anfangsglied a, das letzte Glied t und den Quotienten q die vorhin angeführten Werte setzt. Hiernach erhält man:

$$s = \frac{rq^{n-1} \cdot q - r}{q - 1} = \frac{rq^n - r}{q - 1}$$

oder:

$$s = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

Setzt man diesen Wert für die in der Klammer der Gleichung 2). stehende geometrische Reihe ein, so erhält man:

$$K = k \cdot q^n + \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

nämlich umstehende Formel 4ᵃ.

Setzt man in dieser Formel an Stelle des Zinsfaktors q den Wert: $\frac{100 + p}{100} = 1{,}0p$, so erhält man:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p - 1}$$

oder umstehende Formel 4:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Erkl. 40. In Betreff der geometrischen Reihen siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Erkl. 41. Zwischen dem summatorischen Glied s, dem ersten Glied a, dem Quotient q und dem letzten Glied t einer geometrischen Reihe besteht die Relation:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Reihen, Seite 19).

Erkl. 42. Der Formel 4 kann man noch durch einfache Umwandlung eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form wie folgt geben.

Aus Formel 4 erhält man:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot 1{,}0p^n - r}{0{,}0p}$$

oder:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot 1{,}0p^n}{0{,}0p} - \frac{r}{0{,}0p}$$

und hieraus ergibt sich die zur Berechnung von K bequemere Formel 4ᵇ:

Formel 4ᵇ: $K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$

Gelöste Aufgaben.

*). **Aufgabe 11.** Ein Kapital von 6000 ℳ steht auf Zinseszinsen zu 5 % und wird am Ende eines jeden Jahres, ausser den Zinsen, noch um 400 ℳ vermehrt. Was wird der künftige Wert dieses Kapitals nach 10 Jahren sein?

Formel 4b: $K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$

(siehe Erkl. 42.)

Auflösung.

In der Aufgabe ist:

das Anfangskapital	$k = 6000$ ℳ	gegeben
der Prozentsatz	$p = 5$	gegeben
die Anzahl der Jahre	$n = 10$	gegeben
die jährliche Zulage	$r = 400$ ℳ	gegeben
und der künftige Wert, bezw. das Endkapital	$K = x$	gesucht.

Da der Berechnung Zinseszinsen zu Grunde gelegt werden sollen, ausserdem am Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Summe: $r = 400$ zugelegt wird und nach dem künftigen Wert K gefragt ist, so kommt vorstehende Formel:

$$K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$$

als diejenige, aus welcher sich K am bequemsten berechnen lässt (siehe die Erkl. 42 und 43), in Anwendung:

Setzt man die gegebenen Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$K = \left(6000 + \frac{400}{0{,}05}\right) 1{,}05^{10} - \frac{400}{0{,}05}$$

oder:

$$K = \left(6000 + \frac{400 . 100}{5}\right) 1{,}05^{10} - \frac{400 . 100}{5}$$

oder:

$$K = (6000 + 400 . 20)\, 1{,}05^{10} - 400 . 20$$

$$K = (6000 + 8000)\, 1{,}05^{10} - 8000$$

$$K = 14000 . 1{,}05^{10} - 8000$$

Den ersten Summanden muss man zunächst für sich berechnen; dies geschieht durch Logarithmierung, wie folgt:

$$log\, 14000 . 1{,}05^{10} = log\, 14000 + 10 . log\, 1{,}05$$

Nun ist: $log\, 14000 = 4{,}1461280$

$10 . log\, 1{,}05 = 10 . 0{,}0211893 = 0{,}2118930$

$log\, 14000 . 1{,}05^{10} = 4{,}3580210$

0110
100
95,5
4,5
3,8

mithin:

$14000 . 1{,}05^{10} = 22804{,}52$

Erkl. 43. Dass die in der Erkl. 42 angegebene Formel 4b, wenn nach dem künftigen Werte K gefragt ist, bei numerischen Berechnungen bequemer ist als die Formel 4a, bezw. Formel 4, ersieht man sofort bei der Ausrechnung nebenstehender Aufgabe; indem man bei Benutzung der Formel 4b nur einmal mit Logarithmen zu rechnen hat, während bei Benutzung der Formel 4a, bezw. der Formel 4, sowohl der erste Summand: $k . 1{,}0p^n$ als auch das Glied: $1{,}0p^n$ des zweiten Summanden, je für sich logarithmisch berechnet werden müssen.

Für den künftigen Wert K hat man sonach:

$$K = 22804{,}52 - 8000 \text{ oder:}$$

oder:

$$K = 14804{,}52 \text{ ℳ}$$

*). **Aufgabe 12.** Ein Pachter ist 9 Jahre hindurch mit seiner Pacht von 280 ℳ im Rückstande geblieben. Wieviel hat derselbe am Ende des 9ten Jahres zu zahlen, wenn ihm 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formel 4: $K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Der Pachter hat am Anfange des 1ten Jahres nichts (0), am Ende des 1ten Jahres seine Pacht mit 280 ℳ zu zahlen; da er mit dieser Summe aber im Rückstande bleibt, so werden ihm 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht, ebenso für die am Ende der folgenden 8 Jahre fälligen Pachtsummen, welche der Pachter nicht berichtigt.

Man kann somit zur Berechnung der am Ende des 9. Jahres von dem Pachter zu zahlenden Summe vorstehende Formel:

$$1).\quad K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

benutzen.

Setzt man in diese Formel für:

K den gesuchten künftigen Wert x;
k die am Anfang des 1. Jahres zu zahlende Summe, welche für den Pachter = 0 ist;
p den Prozentsatz, hier = 5;
n die Anzahl der Jahre, hier = 9 und schliesslich
r die am Ende eines jeden Jahres fällige Pacht von 280 ℳ,

so hat man zur Bestimmung des künftigen Werts K der rückständigen Pachten, die Bestimmungsgleichung:

$$x = 0 \,.\, 1{,}05^9 + \frac{280(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$$

oder nach Erkl. 44:

$$x = 0 + \frac{280(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$$

oder:

$$2).\quad x = \frac{280(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05} \quad \text{(siehe Erkl. 45)}$$

Der Summand $1{,}05^9$ in der Klammer muss nun zunächst für sich berechnet werden; dies geschieht wie folgt:

Erkl. 44. Ein Produkt $(0 \,.\, 1{,}05^9)$ wird = Null, wenn ein Faktor desselben = Null ist.

Erkl. 45. Nebenstehende Gleichung 2). hätte man auch mittelst folgender Betrachtung erhalten:

Die am Ende des 1. Jahres fällige Pacht r wächst nach der allgemeinen Zinseszinsformel 1b bis zu Ende des 9. Jahres an, zu: $r \,.\, q^8$, weil die Summe r. 8 Jahre auf Zinseszinsen steht.

Die zweite fällige Pacht steht 7 Jahre auf Zinseszinsen und wächst bis zu Ende des 9. Jahres an, zu: $r\,q^7$ u. s. f.

Die am Ende des 9. Jahres fällige Pacht ist = r.

Die Summe der künftigen Werte der einzelnen Pachten bis zu Ende des 9. Jahres ist somit die gesuchte Summe K; sonach hat man:

$$K = rq^8 + rq^7 + rq^6 + rq^5 + rq^4 + rq^3 + rq^2 + rq^1 + r$$

Die Glieder rechts bilden eine geometrische Reihe (siehe Erkl. 40); schreibt man die Glieder in umgekehrter Reihenfolge, so ist:

das Anfangsglied $= r$
der Quotient $= q$
das Endglied $= rq^8$

und man hat, mit Hülfe der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 41)}$$

wenn man für das Anfangsglied a, das Endglied t und den Quotienten q diese Werte einführt:

$$s = K = \frac{rq^8 \,.\, q - r}{q - 1} = \frac{rq^9 - r}{q - 1}$$

oder für den Zinsfaktor q, den Wert $1{,}0p$ substituiert:

$$K = \frac{r \, . \, 1{,}0p^9 - r}{1{,}0p - 1} \text{ oder:}$$

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^9 - 1)}{0{,}0p} \text{ oder allgemein:}$$

a). . . $$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$$

In Rücksicht der für r, p und n gegebenen Zahlenwerte erhält man:

$$K = \frac{280\,(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$$

nämlich dieselbe Gleichung als umstehende Gleichung 2).

$$log\,1{,}05^9 = 9\,.\,log\,1{,}05$$

$$\begin{array}{rl} log\,1{,}05 = & 0{,}0211893 \\ & .\,9 \\ \hline 9\,.\,log\,1{,}05 = & 0{,}1907037 \\ & 6958 \\ \hline & 79 \\ & 56 \\ \hline & 23 \\ & 22{,}4 \end{array}$$

mithin:

$$1{,}05^9 = 1{,}551328$$

Diesen Wert in umstehende Gleichung 2). substituiert, gibt:

$$x = \frac{280\,(1{,}551328 - 1)}{0{,}05}$$

oder:

$$x = \frac{280\,.\,0{,}551328}{0{,}05}$$

Hieraus kann man x durch Multiplikation und Division oder auf logarithmischem Wege wie folgt berechnen:

$$log\,x = log\,280 + log\,0{,}551328 - log\,0{,}05$$

$$\begin{array}{rrl} \text{Nun ist: } log\,280 = & 2{,}4471580 & \\ log\,0{,}551328 = & 0{,}7414037 - 1 & \text{(Erkl. 24, Seite 8,} \\ & 63 & \text{bezw.} \\ \hline & 3{,}1885680 - 1 & \text{Erkl. 5,} \\ -\,log\,0{,}05 = & +\,0{,}6989700 - 2 & \text{Seite 7, der 1.} \\ & - \quad\quad + & \text{Auflage)} \\ \hline log\,x = & 2{,}4895980 + 1 & \\ \text{oder: } log\,x = & 3{,}4895980 & \\ & 5929 & \\ \hline & 51 & \\ & 42{,}3 & \\ \hline & 8{,}7 & \\ & 8{,}46 & \end{array}$$

mithin:

$$x = 3087{,}436$$

d. h. der Pachter hat am Ende des 9. Jahres die Summe von 3087 ℳ 44 pf. zu zahlen.

Erkl. 46. Die in der Erkl. 45 entwickelte allgemeine Gleichung a). kommt in den mannigfaltigsten Aufgaben in direkte Anwendung, sie ist deshalb als

Formel 5 $$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

besonders dem Gedächtnisse anzuvertrauen.

Diese Formel liefert eine Relation zur Berechnung des künftigen Wertes K einer am Ende eines jeden Jahres, n Jahre lang, zahlbaren Summe r, wenn p % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden. Sie kann als Sparkassenformel für am Ende eines jeden Jahres gemachte gleiche Einzahlungen benutzt werden (siehe Erkl. 49 und 56).

*). **Aufgabe 13.** Ein Vater hinterlässt seinen Kindern sein ganzes Vermögen, aber unter der Bedingung, dass dieselben einem armen Verwandten 20 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres 600 ℳ zahlen. Die Kinder wollen sich dieser Verpflichtung entledigen und wissen, welche Abfindungssumme sie zahlen müssen, wenn die Zinseszinsen zu 4 % gerechnet werden.

Erkl. 47. Weitere derartige Aufgaben, in welchen sogenannte Abfindungs- oder Ablösungssummen zu berechnen sind, findet man in dem II. Teil, welcher über die Rentenrechnung handelt und auch im III. Teil. Solche Aufgaben können auch mittelst der später aufgestellten Rentenformeln gelöst werden.

Formel 1^a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 5: $K = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Bei der Berechnung der Abfindungssumme x (siehe Erkl. 47), welche die Kinder ihrem Verwandten auf einmal geben wollen, um allen weiteren Verpflichtungen enthoben zu sein, muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass der künftige Wert der Abfindungssumme x nach 20 Jahren, 4 % Zinseszinsen gerechnet, gleich ist dem künftigen Werte der am Ende eines jeden Jahres, 20 Jahre lang, zu zahlenden Summe von 600 ℳ, wenn auch hier 4 % Zinseszinsen gerechnet werden.

Den künftigen Wert der Abfindungssumme x findet man aus vorstehender Formel 1^a. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert (das Endkapital);
k die zu zahlende Abfindungssumme x (das Anfangskapital);
n die Anzahl der Jahre, hier = 20;
p den Prozentsatz, hier = 4.

Setzt man diese Werte in jene Formel 1^a ein, so erhält man:

1). . . . $K = x \,.\, 1{,}04^{20}$

Ferner findet man den künftigen Wert der am Ende eines jeden Jahres, 20 Jahre lang, zu zahlenden Summe von 600 ℳ nach vorstehender Formel 5. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert K_1;
r die am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Summe;
n die Anzahl der Jahre, hier = 20 und
p den Prozentsatz, hier = 4.

Setzt man diese Werte in jene Formel 5 ein, so erhält man:

2). . . . $K_1 = \frac{600\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$

Nach dem Eingange der Auflösung besteht nun zwischen den beiden künf-

tigen Werten K und K_1 der Gleichungen 1). und 2)., die neue Gleichung:

$$K = K_1$$

bezw. die Gleichung:

$$x \,.\, 1{,}04^{20} = \frac{600\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt:

$$3). \quad . \; . \quad x = \frac{600\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{20}}$$

Den Summand $1{,}04^{20}$ in der Klammer muss man zunächst für sich berechnen; dies geschieht wie folgt:

$$log\,1{,}04^{20} = 20 \,.\, log\,1{,}04$$

$$\begin{array}{rl} log\,1{,}04 = & 0{,}0170333 \\ & .\,20 \\ \hline log\,1{,}04^{20} = & 0{,}3406660 \\ & 6622 \\ \hline & 38 \\ & 39{,}6 \end{array}$$

mithin:

$$1{,}04^{20} = 2{,}19112$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung 3). ein, so wird:

$$x = \frac{600\,(2{,}19112 - 1)}{0{,}04 \,.\, 2{,}19112}$$

oder:

$$x = \frac{600 \,.\, 1{,}19112}{0{,}04 \,.\, 2{,}19112} = \frac{714{,}67200}{0{,}0876448}$$

Hieraus kann nun x logarithmisch wie folgt berechnet werden:

$$log\,x = log\,714{,}672 - log\,0{,}0876448$$

$$\begin{array}{rl} \text{Nun ist:}\;\; log\,714{,}672 = & 2{,}8541056 \\ & +12 \\ \hline & 2{,}8541068 \\ -\,log\,0{,}0876448 = & +0{,}9427261 - 2 \;\text{(Hülfsrechn. 1)} \\ & - \qquad\qquad + \\ \hline & 1{,}9113807 + 2 \\ \text{oder:}\;\; log\,x = & 3{,}9113807 \\ & 3760 \\ \hline & 47 \\ & 48{,}6 \end{array}$$

mithin:

$$x = 8154{,}19$$

Die Abfindungssumme ist somit = 8154 ℳ 19 pf.

Hülfsrechnung 1.

$$\begin{array}{rl} log\,0{,}0876448 = & 0{,}9427222 - 2 \;\text{(Erkl. 24, S. 8, bezw. Erkl. 5, S. 7, der 1. Aufl.)} \\ & 39 \\ \hline & 0{,}9427261 - 2 \end{array}$$

Aufgabe 14. Ein Beamter spart sich jährlich 500 Mark. Wie lange muss er damit fortfahren bis seine Ersparnisse auf 10000 Mark sich belaufen, wenn die betreffende Sparkasse 5 % Zinseszinsen berechnet?

Formel 5: $K = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Erkl. 46, Seite 21.)

Auflösung.

Der Beamte spart sich jährlich 500 Mark, d. h. am **Ende** eines jeden Jahres hat derselbe 500 Mark übrig, welche er auf eine Sparkasse trägt, die 5 % Zinseszinsen berechnet.

Zur Berechnung der Zeit, welche erforderlich ist, um 10 000 Mark zu sparen, kommt daher umstehende Formel:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

in Anwendung. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert, hier = 10 000 ℳ;
r die am Ende eines jeden Jahres auf Zinseszinsen angelegten Summen von je 500 ℳ;
p den Prozentsatz, hier = 5 und
n die gesuchte Anzahl x der Jahre.

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel ein, so erhält man:

$$10\,000 = \frac{500\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05}$$

Diese Gleichung wird wie folgt nach x aufgelöst:

$$10\,000 \,.\, 0{,}05 = 500\,(1{,}05^x - 1)$$

$$\frac{10\,000 \,.\, 0{,}05}{500} = 1{,}05^x - 1$$

oder:

$$1{,}05^x = \frac{10\,000 \,.\, 0{,}05}{500} + 1$$ (siehe Erkl. 23, Seite 7, bezw. Erkl. 4 d. 1. Aufl.

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung zunächst berechnet, gibt der Reihe nach:

$$1{,}05^x = 20 \,.\, 0{,}05 + 1$$

$$1{,}05^x = 1 + 1$$

oder:

$$1{,}05^x = 2$$

Dies logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, log\,1{,}05 = log\,2$$

$$x = \frac{log\,2}{log\,1{,}05}$$

$$x = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}$$ (siehe Hülfsrechn. 1)

mithin:

$$x = 14{,}20 \ldots \text{ Jahre}$$

Der Beamte erreicht infolge seiner Ersparnisse nach ca. $14\frac{1}{5}$ Jahren die Summe von 10 000 ℳ.

Erkl. 48. Derartige Aufgaben können auch mittelst den Rentenformeln gelöst werden, siehe den III. Teil.

Erkl. 49. Die in der Erkl. 46, Seite 21, entwickelte Formel 5:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

kann, wie aus dieser Aufgabe ersichtlich ist, zur Berechnung des künftigen Wertes von **gleichen jährlichen Sparkasseneinlagen** benutzt werden.

Diese Formel kommt im II. Teil bei der Rentenrechnung wieder zur Entwicklung und Anwendung.

Hülfsrechnung 1.

$$\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = \frac{3010300}{211893}$$

```
211893 | 3010300 | 14,20....
         211893
         ------
          891370
          847572
          ------
           437980
           423786
           ------
           141940
```

5). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird.

Frage 12. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn ein Kapital k zu $p\,^0/_0$ n Jahre lang auf Zinseszinsen steht, dabei am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summe r vermindert wird, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Steht ein Kapital k zu $p\,^0/_0$ n Jahre lang auf Zinseszinsen und wird von demselben am Ende eines jeden Jahres die Summe r weggenommen, so heisst, wenn man den künftigen Wert mit K bezeichnet, die diesbezügliche Zinseszinsformel:

Formel 6 $$K = k\,.\,1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder den Zinsfaktor q eingeführt, die Formel:

Formel 6ª $$K = kq^n - \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formel kann man, wie Formel 4, auf folgende Weise herleiten (siehe Erkl. 50):

Erkl. 50. Obgleich die Entwicklungen der Formeln 4 und 6 fast identisch sind, und dieselben auch zusammen hergeleitet werden können, so ist zur Repetition und zum gründlichen Verständnis solcher Entwicklungen die Herleitung der Formel 6 hier vollständig vorgeführt.

Das auf Zinseszinsen stehende Kapital k (Anfangskapital) wächst bei $p\,^0/_0$ bis zu Ende des 1. Jahres an, zu: kq, wenn man den Wert der Geldeinheit (Mark) bei $p\,^0/_0$ nach Verlauf eines Jahres mit q bezeichnet, bezw. den Zinsfaktor q einführt (siehe Erkl. 39, Seite 17).

Da nun am Ende eines jeden Jahres die Summe r weggenommen werden soll, so hat man am Ende des 1. Jahres die Summe: $kq - r$.

Diese $(kq - r)$ Mark wachsen, analog wie vorhin, siehe Erkl. 39, bis zu Ende des 2. Jahres, an zu: $(kq - r)\,.\,q$ und da zu dieser Zeit wiederum r Mark weggenommen werden, so hat man am Ende des zweiten Jahres die Summe:

$$(kq - r)\,q - r$$

oder:

$$kq^2 - rq - r$$

Diese Summe wächst bis zu Ende des 3. Jahres an, zu: $(kq^2 - rq - r)\,q$ und da am Ende des 3. Jahres abermals die Summe r weggenommen wird, so hat man am Ende des dritten Jahres die Summe:

$$(kq^2 - rq - r)\,q - r$$

oder:

$$kq^3 - rq^2 - rq - r$$

Setzt man diese Betrachtung auf analoge Weise fort, so wird man den künftigen Wert K des Kapitals k, welches auf Zinseszinsen steht und am Ende eines jeden Jahres um die Summe r vermindert wird, nach dem vierten Jahre:

$$K = kq^4 - rq^3 - rq^2 - rq - r$$

oder allgemein, am Ende des n^{ten} Jahres:

$$1).\ldots\quad K = kq^n - rq^{n-1} - rq^{n-2} - \ldots\ldots - rq^2 - rq - r$$

finden.

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden, vom zweiten ab, eine geometrische Reihe (siehe die Erkl. 40, Seite 18); fasst man diese Glieder in einer Klammer zusammen und schreibt sie in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

$$2).\ldots\quad K = kq^n - (r + rq + rq^2 + \ldots\ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1})$$

(siehe Erkl. 51)

so ist sofort ersichtlich, dass das 1. Glied der geometrischen Reihe in der Klammer $= r$, der Quotient dieser Reihe $= q$ und das letzte Glied derselben $= rq^{n-1}$ ist.

Erkl. 51. Damit man in der Klammer nur positive Glieder hat, muss man vor die Klammer ein Minuszeichen setzen. Bei der Auflösung der Klammer in Gleichung 2)., erhält man die Gleichung 1). wieder.

Die Summe sämtlicher Glieder dieser geometrischen Reihe kann man mittelst der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41, Seite 18)

berechnen, wenn man für das Anfangsglied a, das letzte Glied t und den Quotienten q die vorhin angeführten Werte setzt. Hiernach erhält man:

$$s = \frac{rq^{n-1}.\, q - r}{q - 1} = \frac{rq^n - r}{q - 1}$$

oder:

$$s = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Erkl. 51^a. Ist die jährliche Verminderung r kleiner als der Betrag der einfachen jährlichen Zinsen des ursprünglichen Kapitals, so muss der Anwachs (die Accumulation) stetig grösser werden. Ist die jährliche Verminderung hingegen grösser als der Betrag jener einfachen Zinsen, so muss der Anwachs stetig kleiner werden, und kann somit $= 0$ und schliesslich negativ werden, d. h. das Verhältnis des Gläubigers und Schuldners hat sich umgekehrt, ist invers geworden.

Setzt man diesen Wert für den in der Klammer der Gleichung 2). stehenden Ausdruck ein, so erhält man:

$$K = kq^n - \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

nämlich vorstehende Gleichung 6^a.

Setzt man in dieser Formel an Stelle des Zinsfaktors q den Wert: $\frac{100 + p}{100} = 1{,}0p$, so erhält man:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p - 1}$$

oder vorstehende Formel 6:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Erkl. 52. Der Formel 6 kann man noch durch einfache Umwandlung eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form wie folgt geben. Aus Formel 6 erhält man:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n - \frac{r\,.\,1{,}0p^n - r}{0{,}0p}$$

oder:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n - \frac{r\,.\,1{,}0p^n}{0{,}0p} + \frac{r}{0{,}0p}$$

und hieraus ergibt sich die zur Berechnung von K bequemere Formel:

Formel 6^b:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

Erkl. 53. Die Formeln unter Nr. 6 und Nr. 4 kann man zusammenfassen, und schreiben:

a). . . $K = kq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$

oder:

b). . . $K = k \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

oder:

c). . . $K = \left(k \pm \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n \mp \frac{r}{0{,}0p}$

wobei zu berücksichtigen ist, dass die oberen Vorzeichen bei einer jährlichen Zulage, die unteren bei einer jährlichen Wegnahme der Summe r zu benutzen sind.

Gelöste Aufgaben.

*). **Aufgabe 15.** Eine Schuld von 15476 Mark steht zu 5 % auf Zinseszinsen; am Ende eines jeden Jahres werden 600 Mark abgetragen. Wieviel beträgt der Rest der Schuld nach Verlauf von 10 Jahren?

Formel 6^b:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

(siehe Formel 6 b in Erkl. 52)

Auflösung.

In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 15467$
der Prozentsatz $p = 5$
die Anzahl der Jahre $n = 10$
die am Ende eines jeden Jahres stattfindende jährliche Verminderung $r = 600$
} gegeben

und der künftige Wert $K = x$ gesucht.

Mit Benutzung vorstehender Formel:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$x = \left(15467 - \frac{600}{0{,}05}\right) \cdot 1{,}05^{10} + \frac{600}{0{,}05}$$

woraus man x wie folgt berechnen kann:

$$x = \left(15467 - \frac{600 \cdot 100}{5}\right) 1{,}05^{10} + \frac{600 \cdot 100}{5}$$

$$x = (15466 - 600 \cdot 20)\, 1{,}05^{10} + 600 \cdot 20$$

$$x = (15467 - 12000)\, 1{,}05^{10} + 12000$$

$$x = 3467 \cdot 1{,}05^{10} + 12000$$

Da nun der erste Summand eine Potenz mit dem Exponenten 10 als Faktor enthält, so muss derselbe zunächst berechnet werden.

Man erhält:

$$\log 3467 . 1{,}05^{10} = \log 3467 + 10 . \log 1{,}05$$

$$\log 3467 = 3{,}5399538$$
$$10 . \log 1{,}05 = 10 . 0{,}0211893 = 0{,}2118930$$
$$\log 3467 . 1{,}05^{10} = 3{,}7518468$$

8409
59
60,8

mithin:

$$3467 . 1{,}05^{10} = 5647{,}38$$

Für den gesuchten künftigen Wert x erhält man sonach:

$$x = 5647{,}38 + 12000$$

oder:

$$x = 17647{,}38 = 17647 \text{ ℳ } 38 \text{ pf.}$$

Die Schuld hat sich also vergrössert.

Aufgabe 16. Jemand hat sein Vermögen von 30 000 Mark zu 4 % auf Zinseszinsen gegeben, nimmt aber zur Bestreitung seines Unterhalts am Ende eines jeden Jahres 1800 Mark davon weg. Nach wieviel Jahren wird er sein Vermögen verbraucht haben?

Erkl. 54. Die Aufgabe 16 kann man auch auf allgemeine Weise wie folgt lösen:

Das ausgeliehene Kapital k $(= 30000)$ wächst in den n $(= x)$ Jahren bei p $(= 4)$ % an zu:

$$k . 1{,}0p^n \text{ Mark.}$$

Die am Ende eines jeden Jahres zur Bestreitung des Unterhaltes nötigen r $(= 1800)$ Mark repräsentieren bis Ende des n^{ten} Jahres bei p % nach der Formel 5 (siehe Erkl. 46, Seite 21) einen Wert von:

$$\frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \text{ Mark.}$$

Soll nun das Kapital k durch die jährliche Wegnahme r vollständig getilgt werden, so besteht die Relation:

$$\text{a}). \quad . \; . \; . \quad k . 1{,}0p^n = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

und hieraus erhält man, nach $1{,}0p^n$ aufgelöst, (wenn n gesucht ist):

$$k . 1{,}0p^n . 0{,}0p = r . 1{,}0p^n - r$$

$$1{,}0p^n\,(r - k . 0{,}0p) = r \quad \text{oder:}$$

$$\text{b}). \quad . \; . \; . \quad 1{,}0p^n = \frac{r}{r - k . 0{,}0p}$$

(Man vergleiche hiermit nebenstehende Gleichung 1).

Formel 6:

$$K = k . 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung.

In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 30\,000$ ℳ
der Prozentsatz $p = 4$
die am Ende eines jeden Jahres stattfindende Wegnahme $r = 1800$ ℳ
} gegeben

ferner ist: der künftige Wert $K = 0$, da die betr. Person ihr Vermögen aufzehren will, und die Anzahl n der Jahre, in welcher dies stattfinden kann, ist gesucht, also $= x$.

In Rücksicht dieser Werte erhält man aus vorstehender Formel:

$$K = k . 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

die Gleichung:

$$0 = 30000 . 1{,}04^x - \frac{1800\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04}$$

oder:

$$\frac{1800 . (1{,}04^x - 1)}{0{,}04} = 30000 . 1{,}04^x$$

(siehe Erkl. 23, Seite 7, bezw. Erkl. 4 d. 1. Aufl.)

$$1800 . 1{,}04^x - 1800 = 30000 . 1{,}04^x . 0{,}04$$

$$1800 . 1{,}04^x - 30000 . 1{,}04^x . 0{,}04 = 1800$$

$$1{,}04^x\,(1800 - 30000 . 0{,}04) = 1800$$

(siehe Erkl. 55)

$$1). \;.\;.\quad 1{,}04^x = \frac{1800}{1800 - 30000 . 0{,}04} \quad \text{(siehe Erkl. 54)}$$

Erkl. 55. Die Potenz $1{,}04^x$ wurde, da sie die Unbekannte x enthält, als gemeinschaftlicher Faktor ausgeschieden.

Hülfsrechnung 1.

$$\frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = \frac{4771213}{170333}$$

```
170333 | 4771213 | 28,01
          340666
         1364553
         1362664
          188900
```

$$1{,}04^x = \frac{1800}{1800 - 1200} = \frac{1800}{600}$$

$$1{,}04^x = 3$$

Um x zu berechnen, muss man die Gleichung logarithmieren (siehe Erkl. 23, Seite 7, bezw. Erkl. 4 der 1. Auflage), wonach man erhält:

$$x \,.\, log\, 1{,}04 = log\, 3$$

$$x = \frac{log\, 3}{log\, 1{,}04}$$

$$x = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} \quad \text{(Hülfsrechn. 1)}$$

oder:

$$x = 28{,}01$$

Nach 28 Jahren wird also das Vermögen aufgebraucht sein.

Erkl. 56. Die in der Erkl. 54 entwickelte allgemeine Gleichung a)., in Beziehung auf k aufgelöst, kommt in den mannigfaltigsten Aufgaben in direkte Anwendung, sie ist deshalb als

Formel 7 $k = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}$

besonders dem Gedächtnisse anzuvertrauen.

Diese Formel liefert eine Relation zur Berechnung des baren Wertes k einer Schuld, die n Jahre auf Zinseszinsen steht und durch am Ende eines jeden Jahres fällige Ratenzahlungen von je r nach Ablauf jene n Jahre getilgt werden soll. Sie kann deshalb als Tilgungsformel oder als Amortisationsformel (siehe Erkl. 59) für am Ende eines jeden Jahres zu machenden gleichen Ratenzahlungen von je r benutzt werden.

Diese Formel kommt im II. Teil bei der Rentenrechnung wieder zur Entwicklung und Anwendung.

*). **Aufgabe 17.** Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung machen, dasselbe durch einen am Ende jeden Jahres zu zahlenden Betrag von je 10000 ℳ binnen 20 Jahren zu tilgen. Welche Summe wird die Bank der Stadt bei 4 % Zinseszinsen leihen können?

Formel 6: $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Der Billigkeit gemäss muss angenommen werden, dass die gesuchte Summe, welche die Stadt von der Bank leiht, sofort auf Zinseszinsen zu 4 % angelegt wird und dass die Stadt der Bank am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe (10000 Mark) zur Tilgung die-

Erlk. 57. Die von Korporationen, als Gemeinden etc. zu irgend welchen Zwecken, z. B. zur Errichtung von Neubauten, als: Schulen, Kirchen etc., aufgenommenen Gelder werden gewöhnlich in einer bestimmten Reihe von Jahren durch jährlich zu zahlenden Summen, Ratenzahlungen, sogenannte Quoten, getilgt oder wie man gewöhnlich zu sagen pflegt „amortisiert". Die Rechnung, nach welchen derartige Tilgungen ausgeführt werden, heisst dementsprechend „Amortisationsrechnung" und liegt derselben die Zinseszinsrechnung (oder Rentenrechnung, siehe II. und III. Teil) zu Grunde. Die Ratenzahlungen selbst heissen „Amortisationsquoten".

Alle Schuldentilgungsrechnungen gehören zu der Amortisationsrechnung.

Erkl. 58. Soll durch jährliche Zahlungen eine Summe getilgt (amortisiert) werden, so muss eine solche Ratenzahlung, Tilgungs- oder Amortisationsquote grösser als die Summe der jährlichen einfachen Zinsen sein (siehe Erkl. 51a).

Erkl. 59. Bei Schuldentilgungen, bezw. bei Amortisations-Rechnungen kommt die in der Erkl. 56 entwickelte Formel:

$$k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}$$

zur Anwendung. In derselben bedeutet k die zu tilgende, zu amortisierende Schuld und r die am Ende eines jeden Jahres fälllge Tilgungsquote.

Hülfsrechnungen.

1). $log\, 1{,}04^{20} = 20 \,.\, log\, 1{,}04$

$log\, 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,20$
$20 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}3406660$

6622
38
39,6

mithin: $1{,}04^{20} = 2{,}19112$

2). $log\, 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$log\, 2{,}19112 = 0{,}3406622$
40
$0{,}9427262 - 2$

ser Schuld abträgt (siehe Erkl. 57), und zwar solange, bis der künftige Wert der geliehenen Summe = 0 wird.

Die Aufgabe kann hiernach mittelst umstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

gelöst werden. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert, derselbe wird bis zur gänzlichen Tilgung = 0;
k das Anfangskapital, das ist die von der Bank geliehene und gesuchte Summe x;
p den Prozentsatz, hier = 4;
n die Anzahl der Jahre, hier = 20, und
r die am Ende eines jeden Jahres abzutragende Summe von 10000 ℳ.

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel ein, so erhält man:

$$0 = x \,.\, 1{,}04^{20} - \frac{10000\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

und hieraus findet man x wie folgt:

$$x \,.\, 1{,}04^{20} = \frac{10000\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

oder:

$$1).\quad x = \frac{10000\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{20}}$$ (siehe Erkl. 59

Die Potenz $1{,}04^{20}$ muss nun zunächst berechnet werden; dies geschieht wie in nebenstehender Hülfsrechn. 1 angegeben.

Hiernach erhält man:

$$x = \frac{10000\,(2{,}19112 - 1)}{0{,}04 \,.\, 2{,}19112}$$

oder:

$$x = \frac{10000 \,.\, 1{,}19112}{0{,}04 \,.\, 2{,}19112}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$log\, x = log\, 10000 + log\, 1{,}19112 - (log\, 0{,}04 + log\, 2{,}19112)$

Nun ist: $log\, 10000 = 4{,}0000000$
$+\, log\, 1{,}19112 = 0{,}0759482$
$+\, 73$
$4{,}0759555$
$-(log\, 0{,}04 + log\, 2{,}19112) = +0{,}9427262 - 2$ (Hlfsr. 2)
$- \quad +$
$log\, x = 3{,}1332293 + 2$
oder: $log\, x = 5{,}1332293$

2195
98
95,7
2,3
2,2

mithin:

$x = 135903{,}07$

Die Bank kann somit unter den gestellten Bedingungen der Stadt 135903 Mark leihen.

*). **Aufgabe 18.** Eine Schuld von 800 Mark wird in 10 gleichen Jahresraten, am Ende des Jahres zahlbar, abgetragen. Wie gross ist eine solche Rate, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

Hülfsrechnung.

$log\, 1{,}05^{10} = 10 . log\, 1{,}05$

$log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
$.10$
$0{,}2118930$
8678
252
239,4

mithin:
$1{,}05^{10} = 1{,}62889$

Erkl. 60. Löst man (siehe Erkl. 59) die in der Erkl. 56 aufgestellte Formel 7:

a). . . . $k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n . 0{,}0p}$

welcher man auch den Namen „Tilgungs- oder Amortisationsformel" geben kann, zur Berechnung einer Tilgungsquote nach r auf, so erhält man:

b). . . . $r = \frac{k . 1{,}0p^n . 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}$

Diese Gleichung hätte man auch zur Lösung der Aufgabe 18, siehe nebenstehende Gleich. 1). benutzen können.

Formel 6: $K = k . 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Zur Berechnung der gesuchten, am Ende eines jeden Jahres fälligen Rate dient vorstehende Formel. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert, derselbe ist bis zur gänzlichen Tilgung der Schuld = 0;
k (Anfangskapital) die Schuld = 800 ℳ.
p den Prozentsatz, hier = 5;
n die Anzahl der Jahre, hier = 10, und
r die gesuchte jährliche Rate x.

Substituiert man diese Werte in obige Formel, so erhält man:

$$0 = 800 . 1{,}05^{10} - \frac{x\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05}$$

Hieraus ergibt sich x, wie folgt:

$$\frac{x\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} = 800 . 1{,}05^{10}$$

oder:

$$x = \frac{0{,}05 . 800 . 1{,}05^{10}}{1{,}05^{10} - 1}$$

Setzt man den in nebenstehender Hülfsrechnung für $1{,}05^{10}$ berechneten Wert ein, so ist:

$$x = \frac{0{,}05 . 800 . 1{,}62889}{1{,}62889 - 1}$$

oder:

1). $x = \frac{0{,}05 . 800 . 1{,}62889}{0{,}62889}$ (siehe Erkl. 60)

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, x = log\, 0{,}05 + log\, 800 + log\, 1{,}62889 - log\, 0{,}62889$$

Nun ist: $log\, 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$ (Erkl. 24, Seite 8, bezw. Erkl. 5 d. 1. Aufl.)
$+ log\, 800 = 2{,}9030900$
$+ log\, 1{,}62889 = 0{,}2128678$
$+ 239$
$3{,}8149517 - 2$
$- log\, 0{,}62889 = + 0{,}7985747 - 1$
$- \quad +$
$log\, x = 3{,}0168770 - 1$
oder: $log\, x = 2{,}0163770$
3647
123
125,4

mithin: $x = 103{,}843$

Die jährliche Abschlagszahlung beträgt somit: 103 ℳ 84 pf.

*). **Aufgabe 19.** Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $2\frac{1}{2}$ Prozent beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 51619 Kubikmeter; wie gross ist der Bestand nach 20 Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres 1873 Kubikmeter gefällt werden?

Formel 6: $K = \left(k - \frac{r}{0,0p}\right)1,0p^n + \frac{r}{0,0p}$

(siehe Formel 6b in der Erkl. 52, Seite 26)

Auflösung.

Da der Holzbestand eines Waldes sich in ähnlicher Weise vermehrt wie ein Kapital, welches auf Zinseszinsen steht, und nach der Aufgabe, am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Menge Holz ausgehauen wird, dabei nach dem künftigen Bestand des Waldes gefragt ist, so kann man zur Berechnung vorstehende Formel:

$$K = \left(k - \frac{r}{0,0p}\right)1,0p^n + \frac{r}{0,0p}$$

benutzen. In derselben bedeutet:

K den gesuchten künftigen Bestand (Wert) x des Waldes;
k den Anfangsbestand = 51619 kbm;
p den Prozentsatz, hier = $2\frac{1}{2}$ = 2,5;
n die Anzahl der Jahre, hier = 20, und
r die Menge der am Ende eines jeden Jahres stattfindenden Ausholzung = 1873 kbm.

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel ein, so wird:

$$x = \left(51619 - \frac{1873}{0,025}\right)1,025^{20} + \frac{1873}{0,025}$$

(siehe Erkl. 61)

oder:

$$x = \left(51619 - \frac{1873 \,.\, 1000}{25}\right)1,025^{20} + \frac{1873 \,.\, 1000}{25}$$

$$x = (51619 - 1873 \,.\, 40) \,.\, 1,025^{20} + 1873 \,.\, 40$$

$$x = (51619 - 74920)\, 1,025^{20} + 74920$$

$$x = -23301 \,.\, 1,025^{20} + 74920$$

Der erste Summand: $23301 \,.\, 1,025^{20}$ muss zunächst berechnet werden; dies ist in nebenstehender Hülfsrechnung geschehen, wonach man erhält:

$$x = -38181,5 + 74920$$

oder:

$$x = 36738,5$$

Der Bestand des Waldes nach 20 Jahren beträgt somit:

36738,5 Kubikmeter.

Erkl. 61. Da $1,0p = \frac{100+p}{100}$ ist, so wird für $p = 2,5$ gesetzt:

$$1,0p = \frac{100+2,5}{100} = \frac{102,5}{100}$$

oder:

$1,0p = 1,025$ (siehe Erkl. 9, Seite 2, bezw. Erkl. 2 der 1. Auflage).

Hülfsrechnung.

$log\, 23301 \,.\, 1,025^{20} = log\, 23301 + 20 \,.\, log\, 1,025$

$$\begin{aligned} log\, 23301 &= 4,3673746 \\ +20 \,.\, log 1,025 = 20 \,.\, 0,0107239 &= 0,2144780 \\ &\overline{\, 4,5818526} \\ &\quad 8473 \\ &\quad\quad 53 \\ &\quad\quad 57 \end{aligned}$$

mithin:

$23301 \,.\, 1,025^{20} = \underline{38181,5}$

6). Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn **am Anfange** eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe **vermehrt** oder **vermindert** wird.

Frage 13. Wie heissen die Zinseszinsformeln, wenn ein Kapital k zu $p\,\%$ n Jahre lang auf Zinseszinsen steht, dabei am Anfange eines jeden Jahres um eine gewisse Summe r vermehrt oder vermindert wird, und wie werden diese Formeln hergeleitet?

Antwort. Steht ein Kapital k zu $p\%$ n Jahre lang auf Zinseszinsen und wird dasselbe am Anfange eines jeden Jahres um eine Summe r vermehrt bezw. vermindert, so heissen, wenn man die künftigen Werte mit K bezeichnet, die diesbezüglichen Zinseszinsformeln:

Formel 8 $$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

beziehungsweise

Formel 9 $$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt:

Formel 8ª $$K = kq^n + \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

beziehungsweise

Formel 9ª $$K = kq^n - \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formeln kann man, wie die Formeln 4 und 6 auf folgende Weise gleichzeitig herleiten:

Das auf Zinseszinsen stehende Kapital k wird sofort, d. h. schon am Anfange des ersten Jahres um die Summe r vermehrt, bezw. vermindert; somit hat man **am Anfange** des **ersten** Jahres die Summe: $(k \pm r)$

Diese Summe wächst bei $p\,\%$ bis zu Ende des ersten Jahres an, zu: $(k \pm r)\,q$, wenn man den Wert der Geldeinheit (Mark) bei $p\,\%$ nach Verlauf eines Jahres mit q bezeichnet, bezw. den Zinsfaktor q einführt (siehe Erkl. 39, Seite 17, bezw. Erkl. 15 der 1. Auflage).

Da nun am Anfange des zweiten Jahres abermals die Summe r zugelegt bezw. weggenommen wird, so hat man **am Anfange** des **zweiten** Jahres die Summe:

$$(k \pm r)\,q \pm r$$

oder:

$$kq \pm rq \pm r$$

Diese $(kq \pm rq \pm r)$ Mark wachsen bis zu Ende des zweiten Jahres an, zu:

$$(kq \pm rq \pm r) \cdot q$$

und da am Anfange des dritten Jahres wieder die Summe r zugelegt bezw. weggenommen wird, so hat man **am Anfange** des **dritten** Jahres die Summe:

$$(kq \pm rq \pm r)\, q \pm r$$

oder:

$$kq^2 \pm rq^2 \pm rq \pm r$$

und diese $(kq^2 \pm rq^2 \pm rq \pm r)$ Mark wachsen bis Ende des dritten Jahres zu:

$$(kq^2 \pm rq^2 \pm rq \pm rq) =$$

$$kq^3 \pm rq^3 \pm rq^2 \pm rq \text{ Mark an.}$$

Setzt man diese Betrachtung fort, so wird man für den künftigen Wert K am Ende des vierten Jahres:

$$K = kq^4 \pm rq^4 \pm rq^3 \pm rq^2 \pm rq$$

oder **allgemein** am Ende des n^{ten} Jahres:

$$1). \ldots K = kq^n \pm rq^n \pm rq^{n-1} \pm \cdots \pm rq^3 \pm rq^2 \pm rq$$

finden.

Bei näherer Betrachtung dieser Gleichung findet man, dass die Glieder rechts, vom zweiten ab, eine geometrische Reihe (siehe Erkl. 40, Seite 18, d. 2. Aufl.) bilden; fasst man diese Glieder in einer Klammer zusammen und schreibt sie, nachdem der gemeinschaftliche Faktor $\pm r$ ausgeschieden wurde, in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

$$2). \ldots K = kq^n \pm r(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n)$$

(siehe Erkl. 62)

so ist ersichtlich, dass das erste Glied a der geometrischen Reihe in der Klammer $= q$, der Quotient q dieser Reihe $= q$ und das letzte Glied t derselben $= q^n$ ist.

Setzt man diese Werte für a, q und t in die Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41, Seite 18, der 2. Auflage)

ein, so erhält man für die Summe s der Glieder in der Klammer der Gleichung 2).:

$$s = \frac{q^n \cdot q - q}{q - 1} \text{ oder } = \frac{q\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diesen Wert für den in der Klammer der Gleichung 2). stehenden Ausdruck substituiert, gibt:

$$K = k \cdot q^n \pm \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

nämlich die zusammengefassten vorstehenden Formeln 8 und 9.

Erkl. 62. Damit man in der Klammer der Gleich. 2). nur positive Glieder erhält, wurde im ersten Falle $+r$, im zweiten Falle $-r$ als gemeinschaftlicher Faktor ausgeschieden. Bei der Auflösung der Klammer in Gleich. 2). muss man die Gleich. 1). wieder erhalten.

Setzt man in dieser Formel an Stelle des Zinsfaktors q den Wert $\frac{100+p}{100} = 1{,}0p$, so erhält man:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p - 1}$$

oder die zusammengefassten vorstehenden Formeln 8[a] und 9[a]:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Erkl. 63. Den Formeln 8 und 9 kann man noch durch einfache Umwandlung eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form, wie folgt geben.

Aus den zusammengezogenen Formeln 8 und 9 erhält man:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{1{,}0p \cdot 1{,}0p^n \cdot r - 1{,}0p \cdot r}{0{,}0p}$$

oder:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{1{,}0p \cdot 1{,}0p^n \cdot r}{0{,}0p} \mp \frac{1{,}0p \cdot r}{0{,}0p}$$

und hieraus ergeben sich die zur Berechnung von K bequemeren Formeln:

Formel 8[b]:

$$K = \left(k + \frac{1{,}0p \cdot r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n - \frac{1{,}0p \cdot r}{0{,}0p}$$

Formel 9[b]:

$$K = \left(k - \frac{1{,}0p \cdot r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{1{,}0p \cdot r}{0{,}0p}$$

wobei zu bemerken ist, dass die erste Formel bei einer jährlichen Zulage, die zweite Formel bei einer jährlichen Wegnahme zu benutzen ist.

Erkl. 64. Ist in der Formel 8 das Anfangskapital $k = 0$, so erhält man die der Formel 5 (Erkl. 46 der 2. Auflage), bezw. der Formel 7 (Erkl. 56 der 2. Auflage) analoge

Formel 10 $K = \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Diese Formel liefert eine Relation zur Berechnung des künftigen Wertes K einer am Anfange eines jeden Jahres, n Jahre lang, zahlbaren Summe r, wenn $p\,\%$ Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden. Sie kann als Sparkassenformel für gleiche, am Anfange eines jeden Jahres gemachte Einzahlungen benutzt werden (siehe Erkl. 46 der 2. Auflage).

Anmerkung 4. Diesbezügliche gelöste und analoge ungelöste Aufgaben findet man in einem späteren Abschnitt.

7). Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende, bezw. am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird.

Frage 14. Welche Formen nehmen die Formeln 4, 6, 8 und 9 an, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten — z. Beisp. nach je $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapital geschlagen werden, und wenn das ausgeliehene Kapital am Ende, bezw. am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r vermehrt oder vermindert wird?

Erkl. 65. Die in der Frage 14 erwähnten Formeln sind:

a). . . $K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Formel 4, Seite 17)

b). . . $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Formel 6, Seite 25)

c). . . $K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{1{,}0p \,.\, r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Formel 8, Seite 33, bezw. Formel 7 der 1. Aufl.)

d). . . $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{1{,}0p \,.\, r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Formel 9, Seite 33, bezw. Formel 8 der 1. Aufl.)

Erkl. 66. In den Formeln 11—14 und in allen ähnlichen Formeln hat man sich an Stelle von $\frac{p}{m}$ die Zahl gesetzt zu denken, welche sich durch Division von m in p ergibt. Ist dieselbe keine ganze Zahl, sondern ein endlicher Dezimalbruch, so lässt man bei der erwähnten Substituierung das Dezimalkomma weg, ergibt jener Quotient keinen endlichen Dezimalbruch, so beachte man, dass

$$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$$

ist und substituiere in diesen Quotienten für $\frac{p}{m}$ den sich ergebenden gewöhnlichen Bruch (siehe die Beispiele 1—3 in der Erkl. 9, S. 2, bezw. die Erkl. 2 in der 1. Auflage).

Antwort. Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten, z. B. nach je $\frac{1}{m}$ Jahr, nutzbringend zum Kapital geschlagen und wird das ausgeliehene Kapital am Ende (bezw. am Anfange) eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahrs um die Summe r vermehrt oder vermindert,* so wird, wie in Antwort der Frage 10, bezw. der Frage 9 der 1. Aufl. angegeben ist, in den Formeln 4ª, 6ª, 8ª und 9ª für q, welches alsdann den Wert der Geldeinheit nach $\frac{1}{m}$ Jahr bei p % darstellt, =

$$\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$$

bezw. in den Formeln 4, 6, 8 und 9 für

$$p = \frac{p}{m}$$

gesetzt, und da ferner die Zahl der Zeitabschnitte, nach welchen die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, d. i. zugleich auch die Anzahl der Summen r, welche zugelegt oder weggenommen werden, in diesem Falle $= n \,.\, m$ ist, so gehen die erwähnten Formeln bezw. über in:

Formel 11 . . $K = k \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} + \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r vermehrt wird. (Siehe Antwort der Frage 11, bezw. der Frage 10 der 1. Aufl.)

Formel 12 . . $K = k \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r vermindert wird. (Siehe Antwort der Frage 12, bezw. der Frage 11 der 1. Aufl.)

Formel 13 . . $$K = k \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} + \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r vermehrt wird. (Siehe Antwort der Frage 13, bezw. der Frage 12 der 1. Aufl.)

Formel 14 . . $$K = k \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r vermindert wird. (Siehe Antwort der Frage 13, bezw. der Frage 11 der 1. Aufl.)

Bei Anwendung dieser Formeln 11 bis 14 beachte man die Erkl. 66.

Erkl. 67. Die Formeln 11, 12, 13 und 14 lassen noch manche Vereinfachungen zu; in den gegebenen Formeln stimmen sie jedoch am meisten mit den Formeln überein, aus welchen sie abgeleitet wurden, sind somit dem Studierenden am leichtesten erklärlich.

Erkl. 68. In analoger Weise erhält man aus den Formeln:

5 (siehe Erkl. 46, Seite 21, der 2. Aufl.),
7 („ „ 56, „ 29, „ „ „)
und **10** („ „ 64, „ 35, „ „ „)
bezw. die weiteren Formeln:

Formel 15 $$K = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

Diese Formel liefert den künftigen Wert einer am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres, n Jahre lang, zahlbaren Summe r, wenn p % Zinseszinsen gerechnet und die Zinsen nach Verlauf eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres nutzbringend zum Kapital geschlagen werden.

Siehe Formel 5 in der Erkl. 46, Seite 21, der 2. Aufl.

Formel 16 $$k = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n}}$$

Diese Formel liefert den baren Wert einer am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres, n Jahre lang, zahlbaren Summe r, wenn p % Zinseszinsen gerechnet und die Zinsen nach Verlauf eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres nutzbringend zum Kapital geschlagen werden.

Siehe Formel 7 in der Erkl. 56, Seite 29, der 2. Aufl.

Formel 17 $K = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

Diese Formel liefert den künftigen Wert einer am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres, n Jahre lang, zahlbaren Summe r, wenn p % Zinseszinsen gerechnet und die Zinsen nach je $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapital geschlagen werden.

Siehe Formel 10 in der Erkl. 64, Seite 35, der 2. Aufl.

Anmerkung 5. Diesbezügliche gelöste und analoge ungelöste Aufgaben findet man in späteren Abschnitten.

8). Entwicklung der Hauptzinseszinsformel, wenn die Anzahl n der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist.

a). Beweis der Allgemeingültigkeit der Zinseszinsformel 1.

Frage 15. Gilt die Hauptzinseszinsformel:

$$K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

auch, wenn n eine gemischte oder gebrochene Zahl ist?

Die Aussage ist zu beweisen.

Erkl. 69. Wenn es heisst: ein Kapital steht zu p % auf Zinsen oder Zinseszinsen, so sind stets jährlich zu zahlende Zinsen bedungen.

Erkl. 70. Für den Endwert $\mathfrak{K}$ des ursprünglichen Kapitals k zu p % nach den n ganzen Jahren hat man nach der Formel 1, die Gleichung:

a). $\mathfrak{K} = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$

Erkl. 71. Bezeichnet man den Zinsfuss, zu welchem sich das Endkapital $\mathfrak{K}$ das $\frac{1}{m}$ Jahr noch zu verzinsen hat, mit x, so hat man:

100 M. wachsen in $\frac{1}{m}$ Jahr an, zu $100 + x$, und:

1 „ wächst „ $\frac{1}{m}$ „ „ „ $\frac{100+x}{100}$

1 „ „ in $2 \cdot \frac{1}{m}$ „ „ „ $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2$

1 „ „ „ $3 \cdot \frac{1}{m}$ „ „ „ $\left(\frac{100+x}{100}\right)^3$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

1 „ „ „ $m \cdot \frac{1}{m}$ „ „ „ $\left(\frac{100+x}{100}\right)^m$

(analog der Entwicklung der Formel 1.)

Antwort. Die Hauptzinseszinsformel:

$$K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

(siehe Formel 1)

welche unter der Annahme aufgestellt wurde, dass n eine ganze Zahl ist, hat streng genommen, auch in den Fällen Gültigkeit, in welchen n eine gebrochene oder gemischte Zahl ist.

Beweis dieser Aussage:

Sind jährlich zu zahlende Zinsen bedungen (siehe Erkl. 69) und es soll z. B. nach $\left(n + \frac{1}{m}\right)$ Jahren eine Zahlung erfolgen, so muss man zur Berechnung des künftigen Wertes K den Endwert $\mathfrak{K}$ nach den n ganzen Jahren suchen, dann den Zinsfuss x für das $\frac{1}{m}$ Jahr bestimmen und mit Hülfe desselben ausrechnen, bis zu welcher Summe der Endwert $\mathfrak{K}$ noch in dem $\frac{1}{m}$ Jahr anwächst.

Der für das $\frac{1}{m}$ Jahr festzustellende Zinsfuss x muss, da jährlich zu zahlende Zinsen bedungen sind, offenbar so beschaffen sein, dass, wenn man das Endkapital $\mathfrak{K}$, welches sich nach den n ganzen Jahren ergibt, zu diesem Zinsfusse x noch das ganze letzte Jahr (von welchem $\frac{1}{m}$ ein Teil ist, also m Zeitabschnitte weiter) auf Zinseszinsen stehen lässt, genau dasselbe herauskommt, als wenn man das ursprüngliche Kapital k zu dem

mithin wachsen die $\mathfrak{K}$ Mark, siehe Gleich. a). in Erkl. 70, bis zu Ende des letzten ganzen Jahres (von welchem $\frac{1}{m}$ ein Teil ist) an, zu:

$$\mathfrak{K} \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^m$$

oder für $\mathfrak{K}$ seinen Wert aus Gleichung a). in Erkl. 70 gesetzt, zu:

$$\text{b)}. \; . \; . \quad k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^m$$

Erkl. 72. Für den Endwert K des ursprünglichen Kapitals k zu p % nach $(n+1)$ ganzen Jahren hat man nach der Formel 1, Seite 4, die Gleichung:

$$\text{c)}. \; . \; . \quad K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1}$$

Erkl. 73. Ist die Anzahl n der Jahre eine gebrochene Zahl, z. B. $= n + \frac{1}{m}$ und man setzt in Formel 1 für $n = n + \frac{1}{m}$, so erhält man:

$$K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}}$$

Dies gibt den fraglichen Endwert des Kapitals k nach $(n+\frac{1}{m})$ Jahren an.

Erkl. 74. Der Endwert $\mathfrak{K}$ des Kapitals k nach n ganzen Jahren, ist nach Gleichung a)., Erkl. 70:

$$\mathfrak{K} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

Dieses Kapital steht nun noch $\frac{1}{m}$ Jahr zu dem gefundenen Prozentsatze:

$$x = 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100$$

Nun hat man:

100 ℳ wachsen in dem $\frac{1}{m}$ Jahr an, zu:

$$100 + 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100 = 100 \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

1 ℳ wächst an in dem $\frac{1}{m}$ Jahr, zu:

$$\frac{100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

mithin wächst das Endkapital $\mathfrak{K}\left(= k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n\right)$ in dem $\frac{1}{m}$ Jahr noch an, zu:

$$\text{d)}. \; . \; . \quad k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

Dies gibt den richtigen Endwert des Kapitals k nach $(n+\frac{1}{m})$ Jahren an.

gegebenen Zinsfusse $(n+1)$ Jahre lang auf Zinseszinsen stehen lässt.

Nach den Erklärungen 70, 71 und 72 besteht somit die Gleichung:

$$\text{1)}. \; . \quad k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^m = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1}$$

Hieraus kann man den gesuchten Prozentsatz x für das $\frac{1}{m}$ Jahr wie folgt bestimmen:

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung mit: $k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$, so erhält man:

$$\left(\frac{100+x}{100}\right)^m = \left(\frac{100+p}{100}\right)^1$$

oder:

$$\text{2)}. \; . \; . \quad \frac{100+x}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

mithin:

$$100 + x = 100 \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

und schliesslich für den gesuchten Prozentsatz x:

$$\text{3)}. \; . \; . \quad x = 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100$$

Will man nun untersuchen, ob die Formel 1:

$$K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

auch Gültigkeit hat, wenn n eine gebrochene (gemischte) Zahl, z. B. wenn:

$$n = n + \frac{1}{m}$$

ist, so muss man untersuchen, ob der Ausdruck:

$$k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} \quad \text{(siehe Erkl. 73)}$$

gleich dem Ausdruck:

$$k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} \quad \text{(siehe Erkl. 74)}$$

ist, ob also die Gleichung:

$$\text{4)} \; . \; . \quad k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

eine identische ist. Um dies zu untersuchen, setze man für:

$$\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}$$

alsdann erhält man:

$$k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}$$

oder:

$$\text{5)} \; . \; . \quad k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}}$$

Durch die Identität dieser beiden Ausdrücke ist somit bewiesen, dass die Formel 1:

$$K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

Gültigkeit hat, ob n eine ganze oder eine gebrochene (gemischte) Zahl ist.

b). Entwicklung der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Zinseszinsformel, wenn die Anzahl n der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist.

Frage 16. Welche Formel wird im bürgerlichen Leben, statt der Hauptzinseszinsformel:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n$$

in Anwendung gebracht, wenn die Anzahl n der Jahre eine gebrochene Zahl, z. B. ein gemischter Bruch von der Form: $\left(n+\frac{1}{m}\right)$ ist?

Erkl. 75a. Ist die Anzahl n der Jahre eine gebrochene Zahl, z. B. von der Form:

$$n+\frac{2}{m} \quad \text{oder:} \quad n+\frac{3}{m}$$

allgemein von der Form:

$$n+\frac{m_1}{m}$$

so geht die Formel 18 über in die Formel:

Formel 18a: $K = k\,.\,1{,}0p^n\left(1+\frac{m_1}{m}\cdot 0{,}0p\right)$

Antwort. Obgleich die Allgemeingültigkeit der Formel 1:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n$$

für jeden Wert von n in voriger Antwort nachgewiesen ist, so wird nichtsdestoweniger im bürgerlichen Leben in den Fällen in welchen n eine gebrochene Zahl, z. Beisp. $=\left(n+\frac{1}{m}\right)$ ist, der Endwert K auf andre und zwar auf folgende Weise bestimmt:

In den ersten n ganzen Jahren wächst das Kapital k bei dem gegebenen Prozentsatz p an, zu: $k\,.\,1{,}0p^n$; nun wird der Zinsfuss x_1 (Prozentsatz), zu welchem diese Summe: $k\,.\,1{,}0p^n$ noch das $\frac{1}{m}$ Jahr zu stehen hat, proportional diesem Bruchteile des Jahres, nämlich:

1). . . $x_1 = \frac{p}{m}$ (siehe Antwort der Frage 10, bezw. der Frage 9 der 1. Aufl.)

angenommen.

Man hat somit:

100 ℳ wachsen in $\frac{1}{m}$ Jahr an, zu: $100+\frac{p}{m}$

1 „ wächst „ $\frac{1}{m}$ „ „ „ $\frac{100+\frac{p}{m}}{100}$

mithin wächst die Summe von: $k\,.\,1{,}0p^n$ Mark in dem $\frac{1}{m}$ Jahr noch an, zu:

$$k\,.\,1{,}0p^n\cdot\frac{100+\frac{p}{m}}{100}$$

Für den gesuchten Endwert K nach $\left(n+\frac{1}{m}\right)$ Jahr hat man somit die in Frage stehende, im bürgerlichen Leben gebräuchliche Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{p}{100m}\right)$$

oder:

Formel 18 $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Erkl. 75. Vergleicht man den Zinsfuss:

$$x = 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100$$

(siehe die Gleich. 3). in Antw. der Frage 15)

welcher streng genommen für das $\frac{1}{m}$ Jahr in Anwendung gebracht werden müsste, mit dem Zinsfusse:

$x_1 = \frac{p}{m}$ (siehe die Gleich. 1). in vor. Antw.)

welcher im bürgerlichen Leben für das $\frac{1}{m}$ Jahr in Anwendung gebracht wird, so findet man, dass ersterer kleiner als letzterer ist, dass also die Ungleichung besteht:

$$100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100 < \frac{p}{m},$$

denn: addiert man zu beiden Seiten dieser Ungleichung 100 und dividiert dieselben mit 100, so besteht immer noch die Ungleichung:

$$\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} < \frac{100+\frac{p}{m}}{100}$$

oder:

$$\sqrt[m]{1+0{,}0p} < 1 + 0{,}0\frac{p}{m}$$

oder:

$$\sqrt[m]{1{,}0p} < 1{,}0\frac{p}{m}$$

was leicht ersichtlich ist.

und zwar mit Recht, da die Nutzniessung der Zinsen für den noch übrigen Teil des Jahres dem Kapitalisten zufällt.

Sonach wird in der Praxis der Prozentsatz für den Jahresbruchteil zu hoch angenommen, mithin zu Gunsten des Kapitalisten gerechnet (siehe auch die Erkl. 38, bezw. Erkl. 7 der 1. Aufl.)

Vergleiche die Resultate der Aufgabe 20, Seite 42, welche nach den beiden Annahmen berechnet wurden und siehe die Aufgaben 46 und 47.

Erkl. 76. Bemerkt sei hier, dass bei allen den Aufgaben, in welchen n als ein ächter oder gemischter Bruch vorkommt, der Prozentsatz für den Jahresbruchteil proportional diesem Bruchteil angenommen wird und dass dementsprechend auch die Formeln 3, 11, 12, 13, 14 und 17, bezw. die Formeln 3, 10, 11, 12, 13 u. 16 der 1. Aufl. analoge Veränderungen wie die Formel 1 (siehe die oben entwickelte Formel 18) erleiden, um nicht gegen den in der Geschäftswelt herrschenden Gebrauch,

gegen die Praxis, die Gewohnheit — zu verstossen, obgleich dies, wie vorstehend dargethan, mathematisch unrichtig ist.

Anmerkung 6. Mit den Formeln 1 bis 18 der 2. Aufl. sind die wichtigsten in der Zinseszinsrechnung zur Anwendung kommenden Formeln entwickelt. — Im nachstehenden sollen nun eine Anzahl der verschiedenartigsten praktischen Aufgaben vorgeführt und Fälle, welche noch weitere Formeln ergeben, besonders behandelt werden.

C. Gemischte prakt. Aufgaben über die Zinseszinsrechnung.

1). Gelöste Aufgaben
mit einigen sich daraus noch ergebenden weiteren Formeln.

Aufgabe 20. Jemand gibt 20000 ℳ auf Zinseszinsen zu 5 % jährlich; wieviel kann er nach $12\frac{1}{2}$ Jahren zurückfordern?

Erkl. 77. Diese Aufgabe wurde deshalb, einmal nach der theoretisch richtigen Formel 1, ein andermal nach der in der Praxis gebräuchlichen Formel 18 gelöst, um dem Studierenden den Unterschied, welchen beide Resultate ergeben, zu zeigen und die Richtigkeit der in der Erkl. 75 ausgesprochenen Behauptung durch ein Zahlenbeispiel zu beweisen.

Alle ähnliche weitere Aufgaben sind nach der Formel 18, bezw. nach Erkl. 76 zu lösen, wie es im bürgerlichen Leben Gebrauch ist.

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

„ 18: $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Auflösung 1. Da, streng genommen, die vorstehende Formel 1ª:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

für alle Werte für n Gültigkeit hat (s. die Antw. der Frage 15), so erhält man für den gesuchten künftigen Wert $K = x$, wenn man in diese Formel, für:

das Anfangskapital $k = 20000$
den Prozentsatz $p = 5$ und
die Anzahl n der Jahre $= 12\frac{1}{2}$ (das ist ein gemischter Bruch)

substituiert, die Gleichung:

$$x = 20000 \,.\, 1{,}05^{12\frac{1}{2}}$$

oder:

$$x = 20000 \,.\, 1{,}05^{\frac{25}{2}}$$

Hieraus erhält man K auf logarithmischem Wege, wie folgt:

$$\log x = \log 20000 + \frac{25}{2} \cdot \log 1{,}05$$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad .\,25$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1059465$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 423786$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0{,}5297325$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{25}{2} \cdot \log 1{,}05 = 0{,}2648662$
$+ \log 20000 = 4{,}3010300$
$\log x = 4{,}5658962$

8950
12
11,8
0,4

mithin:

a). . . $x = 36804{,}10$ ℳ

Auflösung 2. Benutzt man die im bürgerlichen Leben übliche Formel 18:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

so erhält man für den gesuchten künftigen Wert $K = x_1$, wenn man in diese Formel, für:

das Anfangskapital $k = 20000$
den Prozentsatz $p = 5$
die Anzahl n der ganzen Jahre $= 12$ und
für den Bruchteil m des letzten Jahres $= 2$

substituiert, die Gleichung:

$$x_1 = 20000 \,.\, 1{,}05^{12}\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)$$

$$x_1 = 20000 \,.\, 1{,}05^{12}(1 + 0{,}025)$$

$$x_1 = 20000 \,.\, 1{,}05^{12} \,.\, 1{,}025$$

Hieraus erhält man K auf logarithmischem Wege, wie folgt:

$$\log x_1 = \log 20000 + 12 \,.\, \log 1{,}05 + \log 1{,}025$$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 12
423786
211893

$12 \,.\, \log 1{,}05 = 0{,}2542716$
$+ \log 20000 = 4{,}3010300$
$+ \log 1{,}025 = 0{,}0107239$

$\log x_1 = 4{,}5660255$
0248
7
7,0

mithin ist:

b). . . $x_1 = 36815{,}06$ ℳ

Bei Vergleichung der beiden Resultate unter a) und b), findet man eine Differenz, von

36815,06 — 36804,10 = 10,96 ℳ

Das Resultat, welches nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel 18 gefunden wurde, ist um diese circa 11 Mark zu gross (siehe die Erkl. 75 der 2. Aufl.) — Für ein grösseres Kapital beträgt diese Differenz entsprechend mehr (s. Erkl. 77).

*). **Aufgabe 21.** Die Einwohnerzahl einer Stadt beträgt gegenwärtig 20000 Einwohner. Wie gross war dieselbe vor 25 Jahren, wenn während dieser Zeit jährlich auf 180 Menschen 9 Geburten und 7 Sterbefälle kamen?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Diese und ähnliche Aufgaben werden nach der Erkl. 32, bezw. der Erkl. 13 der 1. Aufl., mit Hülfe der Zinseszinsformeln gelöst.

Erkl. 78. Um diese Aufgabe mittels der Zinseszinsformel zu lösen, muss der jährliche Zuwachs für 100, bezw. der Prozentsatz p, wie folgt bestimmt werden:

Auf 180 Einw. kommt ein Zuwachs von: $9 - 7 = 2$

„ 1 Einw. kommt ein Zuwachs von $\frac{2}{180}$

„ 100 „ „ „ „ „ $\frac{2 \cdot 100}{180}$

mithin ist:

$$p = \frac{2 \cdot 100}{180} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

Erkl. 79. Für p wurde der Wert $\frac{10}{9}$ gefunden; setzt man diesen Wert für p in:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{100 + \frac{10}{9}}{100} = \frac{900 + 10}{900} = \frac{910}{900} = \frac{91}{90}$$

Hülfsrechnung.

$$\begin{aligned} \log 91 &= 1{,}9590414 \\ -\log 90 &= 1{,}9542425 \\ \hline & \ 0{,}0047989 \\ & \ \cdot 25 \\ \hline & \ 239945 \\ & \ 95978 \\ \hline 25\,(\log 91 - \log 90) &= 0{,}1199725 \end{aligned}$$

In der Aufgabe ist die Zahl der Personen zu Anfang gesucht, also: $k = x$; ferner ist die Anzahl der Personen nach den 25 Jahren: $K = 20000$, die Anzahl n der Jahre $= 25$ und schliesslich ist nach der Erkl. 78 der Prozentsatz: $p = \frac{10}{9}$ gegeben.

Mit Benutzung der vorstehenden Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

erhält man hiernach:

$$20000 = x \cdot \left(1{,}0\tfrac{10}{9}\right)^{25}$$

oder nach Erkl. 79:

$$x \cdot \left(\frac{91}{90}\right)^{25} = 20000$$

mithin:

$$x = \frac{20000}{\left(\frac{91}{90}\right)^{25}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 20000 - 25\,(\log 91 - \log 90)$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist: } \log 20000 &= 4{,}3010300 \\ -25\,(\log 91 - \log 90) &= -0{,}1199725 \text{ (Hülfsr.)} \\ \hline \log x &= 4{,}1810575 \\ & \ 0428 \\ \hline & \ 147 \\ & \ 143{,}5 \end{aligned}$$

mithin:

$$x = 15172{,}5$$

Die Einwohnerzahl betrug sonach vor 25 Jahren, da Bruchteile von Personen keinen Sinn zulassen:

15173 Personen.

Aufgabe 22. In wieviel Jahren wird sich bei einem jährlichen Zuwachs von $2\frac{1}{2}$ % der Bestand eines Waldes von 6250 cbm um 4000 cbm erhöhen?

Formel 1a: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Der Anfangsbestand k des Waldes ist mit 6250 cbm, der Endbestand K desselben mit $6250 + 4000 = 10250$ cbm und der Prozentsatz p für den Zuwachs des Holzes $= 2\frac{1}{2} = 2{,}5$ gegeben. Die Anzahl n der Jahre ist gesucht, also $= x$.

Vorstehende Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n$$

kommt sonach in Anwendung. Setzt man

Erkl. 80. Ist der Prozentsatz p ein echter Bruch oder ein gemischter Bruch, bezw. ein Dezimalbruch, so muss man bei der Berechnung des Zinsfaktors: $1{,}0p$ stets beachten, dass:

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100} \text{ ist.}$$

Ist z. B.: $p = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$, so ist:

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100} = \frac{100+2{,}5}{100} = \frac{102{,}5}{100} = 1{,}025$$

Erkl. 81. Da man in dem Resultat der Aufgabe 22 für die gesuchte Anzahl $n = x$ der Jahre eine gebrochene (gemischte) Zahl, nämlich $n = 20{,}0341$ erhält, so hätte man, um dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch (siehe die Antwort der Frage 16) gerecht zu werden, den Jahresbruchteil 0,0341 auf andre Weise bestimmen müssen, nämlich wie in der Auflösung 2 der Aufgabe 20; da jedoch bei dem Wachstum eines Waldes der Bruchteil eines Jahres ohne Bedeutung ist, indem hier nur ganze Jahre in Betracht kommen können, so ist solches in dieser Aufgabe überflüssig.

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}0107239 = & 0{,}0303163 - 2 \quad \text{(Erkl. 24, bezw. Erkl. 5 d. 1. Aufl.)} \\ & +\ 364{,}5 \\ \hline & 0{,}0303528 - 2 \end{array}$$

die für K, k und p gegebenen Zahlenwerte ein, so ist:

$$10250 = 6250 \,.\, 1{,}025^x \quad \text{(siehe Erkl. 80)}$$

Aus dieser Exponentialgleichung (siehe Erkl. 23, bezw. Erkl. 4 der 1. Aufl.) erhält man x, wie folgt:

$$1{,}025^x = \frac{10250}{6250}$$

Beiderseits logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, \log 1{,}025 = \log 10250 - \log 6250$$

mithin erhält man:

$$x = \frac{\log 10250 - \log 6250}{\log 1{,}025}$$

oder:

$$x = \frac{4{,}0107239 - 3{,}7958800}{0{,}0107239}$$

$$x = \frac{0{,}2148439}{0{,}0107239}$$

Anstatt nun diese angedeutete Division auszuführen, logarithmiere man abermals die ganze Gleichung, wonach man erhält:

$$\log x = \log 0{,}2148439 - \log 0{,}0107239$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Nun ist:} & \log 0{,}2148439 = & 0{,}3321151 - 1 \quad \text{(Erkl. 24)} \\ & & +\ 60{,}9 \\ & & 18{,}27 \\ \hline & & 0{,}3321230 - 1 \\ & -\log 0{,}0107239 = & 0{,}0303528 - 1 \quad \text{(Hülfsr.)} \\ & & - \qquad + \\ \hline \text{folglich:} & \log x = & 0{,}3017702 + 1 \\ \text{oder:} & \log x = & 1{,}3017702 \\ & & 677 \\ \hline \text{mithin ist:} & & 25 \\ & & 21{,}6 \end{array}$$

$$x = 20{,}0341$$

Der Bestand des Waldes wird sich also, abgerundet, nach 20 Jahren um 4000 cbm erhöht haben (siehe Erkl. 81 und vergl. die Aufgabe 28, Seite 52).

*). **Aufgabe 23.** Wenn ein gewisses Kapital zu $4^3/_4$ % während 12 Jahren, oder zu $5^1/_2$ % während 9 Jahren, auf Zinseszinsen ausgeliehen wird, so macht dies in den Endkapitalien einen Unterschied von 100 ℳ. Wie gross ist das ausgeliehene Kapital?

Formel 1ᵃ: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Um eine Gleichung aufstellen zu können, aus welcher sich das gesuchte Kapital berechnen lässt, beachte man, dass die künftigen Werte des unter verschiedenen Bedingungen ausgeliehenen, gesuchten Kapitals x, um 100 ℳ verschieden sind.

Gemäss der Aufgabe ist einmal:

der Prozentsatz $p = 4^3/_4 = 4{,}75$ }
die Anzahl n der Jahre $= 12$ } gegeben

und das Anfangskapital $k = x$ gesucht.

Wird nun der künftige Wert (das Endkapital), welcher unbekannt ist, durch K bezeichnet, so erhält man mittels vorstehender Formel die Relation:

1) . . . $K = x \,.\, 1{,}0475^{12}$ (siehe Erkl. 80.)

Ferner ist der Aufgabe gemäss ein andermal:

der Prozentsatz $p = 5^1/_2 = 5{,}5$ } gegeben
die Anzahl der Jahre $n = 9$ } gegeben
das Anfangskapital (wie vorh.) $k = x$ gesucht.

Wird nun der künftige Wert (das Endkapital), welcher unbekannt ist, durch K_1 bezeichnet, so erhält man mittels vorstehender Formel die weitere Relation:

2) . . . $K_1 = x \,.\, 1{,}055^9$

Da nun der Unterschied der beiden Endkapitalien K und $K_1 = 100$ ist, da also die Beziehung besteht:

3) . . . $K - K_1 = 100$

so erhält man aus den Relationen 1)., 2)., und 3). für x die Bestimmungsgleichung:

4) . . . $x \,.\, 1{,}0475^{12} - x \,.\, 1{,}055^9 = 100$

Hieraus erhält man x, wie folgt:

$$x\,(1{,}0475^{12} - 1{,}055^9) = 100$$

oder: $$x = \frac{100}{1{,}0475^{12} - 1{,}055^9}$$

Der Nenner dieses Bruches ist eine algebraische Summe, welche zunächst berechnet werden muss.

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1) und 2) erhält man:

$$x = \frac{100}{1{,}74521 - 1{,}61909}$$

oder: $$x = \frac{100}{0{,}12612}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 100 - \log 0{,}12612$$

Nun ist: $\log 100 = 2{,}0000000$
$-\log 0{,}12612 = 0{,}1007840 - 1$
$\qquad - \quad +$
folglich: $\log x = \overline{1{,}8992160 + 1}$
oder: $\log x = 2{,}8992160$
29
31
33

mithin:
$x = 792{,}896$

Das gesuchte Kapital x ist sonach $=$ 792 ℳ 90 pf.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}0475^{12} = 12 \,.\, \log 1{,}0475$

Nun ist: $\log 1{,}0475 = 0{,}0201540$
. 12
403080
201540
$\log 1{,}0475^{12} = 0{,}2418480$
52
28
24,9

mithin:
$1{,}0475^{12} = \underline{1{,}74521}$

2). $\log 1{,}055^9 = 9 \,.\, \log 1{,}055$

Nun ist: $\log 1{,}055 = 0{,}0232525$
. 9
$\log 1{,}055^9 = 0{,}2092725$
468
257
242
15

mithin:
$1{,}055^9 = \underline{1{,}61909}$

*). **Aufgabe 24.** Es legt jemand bei einer Sparkasse 1500 ℳ auf Zinseszinsen zu $3^3/_4$ % an. Die Sparkasse verleiht dieses Geld wieder zu 4 % und zwar unter der Bedingung, dass die Zinsen ihr vierteljährlich zum Kapitale geschlagen werden. Wie gross war der Gewinn der Sparkasse, wenn am Ende des 12. Jahres die Auszahlung des Geldes erfolgen soll?

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}01^{48} = 48 \cdot \log 1{,}01$

Nun ist: $\log 1{,}01 = 0{,}0043214$
$\cdot 48$
345712
172856
$\log 1{,}01^{48} = 0{,}2074272$
189
83
81

mithin:
$1{,}01^{48} = \underline{1{,}61223}$

Formel 1ª: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

„ 3: $K = k\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$

Auflösung. Der gesuchte Gewinn x der Sparkasse wird ausgedrückt durch die Differenz der Endkapitalien, welche die Sparkasse am Ende des 12ten Jahres e r h ä l t, bezw. a u s z a h l e n muss.

Zur Berechnung des Endkapitals K, welches die Sparkasse a u s z a h l e n muss, weiss man, dass:

das Anfangskapital $k = 1500$ ℳ
der Prozentsatz $p = 3^3/_4 = 3{,}75$
die Anzahl der Jahre $n = 12$ ist.

Man hat somit nach vorstehender Formel 1ª: $K = k \cdot 1{,}0p^n$ die Gleichung:

1). . . $K = 1500 \cdot 1{,}0375^{12}$ (siehe Erkl. 80).

Zur Berechnung des Endkapitals K_1, welches die Sparkasse e r h ä l t, weiss man, dass:

das Anfangskapital $k = 1500$ ℳ
der Prozentsatz $p = 4$
die Anzahl der Jahre $n = 12$ und
die Zahl m, welche den Jahresbruchteil angibt, nach welchem die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, $= 4$ ist.

Man hat somit nach vorsteh. Formel 3:

$$K = k\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$$

die weitere Gleichung:

2). . . $K_1 = 1500\left(\frac{100 + \frac{4}{4}}{100}\right)^{12 \cdot 4}$

Nach dem oben angeführten, ist der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung, wenn mit x der Gewinn der Sparkasse bezeichnet wird, ausgedrückt durch:

3). . . $K_1 - K = x$

Substituiert man aus den Gleichungen 1) und 2) für K_1 und K die berechneten Werte, so erhält man:

4). $x = 1500\left(\frac{100 + \frac{4}{4}}{100}\right)^{12 \cdot 4} - 1500 \cdot 1{,}0375^{12}$

oder:

2). $\log 1{,}0375^{12} = 12 . \log 1{,}0375$

Nun ist: $\log 1{,}0375 = 0{,}0159881$

$$\begin{array}{r} 0{,}0159881 \\ .\,12 \\ \hline 319762 \\ 159881 \\ \hline 0{,}1918572 \\ 421 \\ \hline 151 \\ 139{,}5 \end{array}$$

$\log 1{,}0375^{12} = 0{,}1918572$

mithin:

$1{,}0375^{12} = 1{,}55545$

$$x = 1500\left[\left(\frac{100+1}{100}\right)^{48} - 1{,}0375^{12}\right]$$

$$x = 1500\,[1{,}01^{48} - 1{,}0375^{12}]$$

Setzt man die in nebenstehenden Hülfsrechnungen 1) und 2) berechneten Werte für die einzelnen Summanden in der Klammer ein, so wird:

$$x = 1500\,[1{,}61223 - 1{,}55545]$$

oder: $x = 1500 . 0{,}05678$

mithin: $x = 85{,}17$

Der Gewinn der Sparkasse beträgt somit nach 12 Jahren: 85 ℳ 17 pf.

Aufgabe 25. Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft 20000 ℳ geborgt und ihr dafür einen Wald verpfändet, welcher jährlich einen reinen Ertrag von 1500 ℳ gewährt. Wenn nun die Herrschaft bei der Rückgabe des Waldes der Gemeinde noch 13219,5 ℳ auszahlt, die Zinseszinsen zu 5 % gerechnet; wie lange war alsdann die Herrschaft im Besitze des Waldes?

Formel 1ª: $K = k . 1{,}0p^n$

„ 5: $K = \dfrac{r . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Zur Aufstellung einer Bestimmungsgleichung aus welcher die gesuchte Anzahl x der Jahre berechnet werden kann, genügt folgende Betrachtung:

Die 20000 ℳ, welche die Gemeinde der Stadt schuldet, wachsen in den x Jahren mit Zinsen und Zinseszinsen bei 5 %, nach vorstehender Formel 1 an, zu:

1). . . $K = 20000 . 1{,}05^x$

Ferner muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass die Herrschaft die jährlichen reinen Erträge (je 1500 ℳ), welche der von der Gemeinde geliehene Wald abwirft, ebenfalls sofort, nämlich am Ende eines jeden Jahres, zu 5 % auf Zinseszinsen anlegt und der Gemeinde gutschreibt.

Setzt man in vorstehender Formel 5:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

für die am Ende eines jeden Jahres auf Zinseszinsen zu legende Summe r, den Wert 1500 und für den Prozentsatz p die Zahl 5 ein, so erhält man den künftigen Wert K_1 der Reinerträge des Waldes nach x Jahren, mittels der Gleichung:

2). . . $K_1 = \dfrac{1500\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05}$

Da nun die Herrschaft nach den x Jahren der Gemeinde noch 13219,5 ℳ bar auszahlt, so hat man nach den Gleichungen 1). und 2). zur Tilgung der gegenseitigen Forderungen, die Gleichung:

$$3).\;.\;.\quad \frac{1500\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05} = 13219{,}5 + 20000\,.\,1{,}05^x$$

Diese Gleichung nach der gesuchten Grösse x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$30000\,(1{,}05^x - 1) = 13219{,}5 + 20000\,.\,1{,}05^x$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

$$30000\,.\,1{,}05^x - 30000 = 13219{,}5 + 20000\,.\,1{,}05^x$$

$$30000\,.\,1{,}05^x - 20000\,.\,1{,}05^x = 30000 + 13219{,}5$$

$$10000\,.\,1{,}05^x = 43219{,}5$$

$$1{,}05^x = \frac{43219{,}5}{10000}$$

$$1{,}05^x = 4{,}32195$$

Diese Exponentialgleichung logarithmiert, gibt:

$$x\,.\,log\,1{,}05 = log\,4{,}32195$$

mithin:

$$x = \frac{log\,4{,}32195}{log\,1{,}05}$$

oder:

$$x = \frac{0{,}6356797}{0{,}0211893}$$ (siehe Hülfsrechn. 2)

Nach der Hülfsrechnung 3 erhält man:

$$x = 30{,}000\ldots$$

Die Herrschaft war somit gerade 30 Jahre im Besitze des Waldes.

Hülfsrechnungen:

1). $\frac{1500}{0{,}05} = \frac{150000}{5} = 30000$

2). $log\,4{,}32195 = 0{,}6356747$
$+ 50$
$0{,}6356797$

3). $\frac{0{,}6356797}{0{,}0211893} = \frac{6356797}{211893}$

211893 | 6356797 | 30,000 ...
635679
7

Aufgabe 26. Für den Ankauf eines Hauses hat Jemand 9000 ℳ bar und 1800 ℳ fünf Jahre nacheinander am Ende eines jeden Jahres zu bezahlen; wie teuer wurde dies Haus gekauft, wenn die Interessen zu 5 % und Zinseszinsen gerechnet werden?

Formel 1ª: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

Formel 5: $K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Soll man die Summe x finden zu welcher das in Rede stehende Haus gekauft wurde, so heisst dies mit andern Worten: man soll den baren, den jetzigen (gegenwärtigen) Wert aller der zu machenden Zahlungen berechnen (siehe Erkl. 29, bezw. Erkl. 11 der 1. Auflage).

Das geschieht, wie folgt:

Der bare Wert der ersten Zahlung ist = 9000 ℳ. Um ferner den baren Wert y der am Ende eines jeden Jahres, 5 Jahre lang, zu zahlenden Summen von je 1800 ℳ zu finden, dient folgende Betrachtung:

Denkt man sich den baren Wert y dieser sämtlichen Ratenzahlungen, fünf Jahre lang zu 5 % auf Zinseszinsen angelegt, so erhält man für den künftigen Wert K desselben nach vorstehender Formel 1ª:

1). . . . $K = y \,.\, 1{,}05^5$

und dieser Wert muss, der Billigkeit gemäss, gleich dem künftigen Werte K_1 ($= K$) der fünf am Ende eines jeden Jahres fälligen Raten von je 1800 Mark sein, wenn auch hier 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden.

Nun hat man nach vorstehender Formel 5:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

wenn man in derselben:

$$r = 1800$$
$$p = 5 \text{ und}$$
$$n = 5 \text{ setzt,}$$

für diesen Endwert K_1 die Gleichung:

2). . . $K_1 = \dfrac{1800\,(1{,}05^5 - 1)}{0{,}05}$

Da $K = K_1$ ist, so folgt aus den Gleich. 1). und 2). die neue Gleichung:

3). . . $y \,.\, 1{,}05^5 = \dfrac{1800\,(1{,}05^5 - 1)}{0{,}05}$

Hieraus erhält man für den baren Wert y der 5 Ratenzahlungen:

4). . . $y = \dfrac{1800\,(1{,}05^5 - 1)}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^5}$

Die Summe x, für welche das Haus angekauft wurde, kann sonach aus der Gleichung:

$$x = 9000 + \frac{1800\,(1{,}05^5 - 1)}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^5}$$

wie folgt gefunden werden:

Hülfsrechnungen:

1). . . $\dfrac{1800}{0{,}05} = \dfrac{180000}{5} = 36000$

2). $\log 1{,}05^{-5} = -5 \,.\, \log 1{,}05$

Nun ist:

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893 \;\cdot -5$$
$$\log 1{,}05^{-5} = -0{,}1059465$$

oder:

$$\log 1{,}05^{-5} = \overset{(+1)}{-0},\overset{(-1)}{1059465} \text{ (s. Erkl. 82)}$$
$$\log 1{,}05^{-5} = 0{,}8940535 - 1$$

0501
34
33

mithin:

$$1{,}05^{-5} = 0{,}783526$$

(siehe Erkl. 83)

3). $0{,}216474 \,.\, 36000 = 216{,}474 \,.\, 36$

1298844
649422
7793,064

Erkl. 82. Da in den Logarithmentafeln keine negativen Logarithmen enthalten sind, so wurde eine positive und eine negative Einheit zu dem negativen Logarithmus addiert, wodurch man einen positiven Logarithmus aber mit negativer Kennziffer erhielt.
(Siehe Kleyers Lehrbuch der Logarithmen.)

Erkl. 83. Dem Numerus eines Logarithmus mit negativer Kennziffer müssen soviele Nullen vorangeschrieben werden, als die negative Kennziffer Einheiten enthält.
(Siehe Kleyers Lehrbuch der Logarithmen.)

$$x = 9000 + \frac{36000\,(1{,}05^5 - 1)}{1{,}05^5} \quad \text{(s. Hülfsr. 1)}$$

$$x = 9000 + 36000\left(\frac{1{,}05^5}{1{,}05^5} - \frac{1}{1{,}05^5}\right)$$

$$x = 9000 + 36000\,(1 - 1{,}05^{-5}) \quad \text{(siehe: Die Potenzen)}$$

$$x = 9000 + 36000\,(1 - 0{,}783526) \quad \text{(siehe Hülfsrechn. 2)}$$

$$x = 9000 + 36000 \,.\, 0{,}216474$$

$$x = 9000 + 7793{,}064 \quad \text{(siehe Hülfsrechn. 3)}$$

mithin:

$$x = 16793{,}06$$

Das Haus kostet sonach: 16793 ℳ

Erkl. 84. Setzt man in der in nebenstehender Auflösung enthaltenen Gleichung 4:

$$y = \frac{1800\,(1{,}05^5 - 1)}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^5}$$

für den baren Wert y allgemein $= w$,
„ die Ratenzahlungen 1800 „ $= r$,
„ den Prozentsatz 5 „ $= p$
und „ die Anzahl der Jahre 5 „ $= n$,

so erhält man die Formel:

Formel 19 $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

welche man auch auf allgemeine Weise, analog der Auflösung in voriger Aufgabe, hätte herleiten können.

Mittels dieser Formel kann man den baren Wert einer am Ende eines jeden Jahres, n Jahre lang, zu zahlenden Summe r berechnen, wenn p % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden.

Vergl. mit dieser Formel die Formel 7, aus welcher man erstere auch ableiten kann.

*). **Aufgabe 27.** Ein Beamter legt am Anfange eines jeden Jahres 100 Mark auf Zinsen, ein andrer Beamter legt zu Ende eines jeden Jahres ebenfalls 100 Mark auf Zinsen und zwar beide auf 20 Jahre hindurch. Wieviel hat der erste Beamte nach diesen 20 Jahren mehr als der zweite, wenn 4 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formel 5: $K = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 10: $K = \dfrac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Den künftigen Wert der jährlichen Ersparnisse des ersten Beamten, findet man, da er dieselben am Anfange eines jeden der 20 Jahre macht, nach vorstehender Formel 10:

$$K = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Den künftigen Wert K_1 der jährlichen Ersparnisse des zweiten Beamten findet man, da er dieselben am Ende eines jeden der 20 Jahre macht, nach vorstehender Formel 5:

$$K_1 = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Den gesuchten Unterschied x dieser beiden künftigen Werte K und K_1 findet man hiernach mittels der Gleichung:

$$x = K - K_1 = \frac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Scheidet man den gemeinschaftlichen Faktor: $\frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ aus, so wird:

$$x = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}\Big[1{,}0p - 1\Big]$$

oder:

$$x = r\Big(1{,}0p^n - 1\Big) \cdot \frac{0{,}0p}{0{,}0p}$$

und man erhält für den gesuchten Unterschied x als allgemeine Lösung der Aufgabe:

1). . . $x = r\,(1{,}0p^n - 1)$

oder für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel:

$$x = 100\,(1{,}04^{20} - 1)$$

Da der erste Summand in der Klammer für sich berechnet werden muss, so erhält man nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$x = 100\,(2{,}19112 - 1)$$

oder:

$$x = 100 \,.\, 1{,}19112$$

$$x = 119{,}112$$

Der Unterschied zwischen den Ersparnissen der beiden Beamten beträgt somit nach 20 Jahren: 119 Mark 11 pf.

Hülfsrechnung.

$log\, 1{,}04^{20} = 20 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist: $log\, 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,20$

$log\, 1{,}04^{20} = 0{,}3406660$

6622
38
39,6

mithin:
$1{,}04^{20} = 2{,}19112$

Aufgabe 28. Vor wieviel Jahren war ein Kapital von 6000 Mark, welches zu 5 % auf Zinseszinsen stand, 5000 Mark wert?

Formel 1^a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

" 18: $K = k \,.\, 1{,}0p^n\left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Auflösung 1. Dem Sinne der Aufgabe entsprechend, kennt man:

das Anfangskapital $k = 5000$ ℳ.
" End- " $K = 6000$ "
den Prozentsatz $p = 5$ und ist
die Anzahl der Jahre $n = ?$ gesucht.

Mit Hülfe vorstehender Formel 1^a:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

und mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte erhält man die Gleichung:

a). . . $6000 = 5000 \,.\, 1{,}05^n$

Dieselbe nach der Erkl. 23, bezw. Erkl. 4 der 1. Auflage) aufgelöst, gibt zunächst:

$$1{,}05^n = \frac{6000}{5000}$$

$$1{,}05^n = \frac{6}{5}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$n \,.\, log\, 1{,}05 = log\, 6 - log\, 5$$

und hieraus erhält man:

$$n = \frac{log\, 6 - log\, 5}{log\, 1{,}05}$$

oder:

$$n = \frac{0{,}7781513 - 0{,}6989700}{0{,}0211893}$$

$$n = \frac{0{,}0791813}{0{,}0211893} = \frac{791813}{211893}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung 1:

$$n = 3{,}736 \text{ Jahre.}$$

Macht man nach der Hülfsrechn. 2 den Decimalbruchteil 0,736 eines Jahres in Monate und Tage, so heisst die Lösung der Aufgabe:

Vor 3 Jahren 8 Monaten und 29 Tagen war die Summe von 6000 Mark, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden, 5000 Mark wert.

Dies ist, wie in Antw. der Frage 15, bezw. der Frage 14 der 1. Auflage, bewiesen, das mathematisch richtige Resultat.

Hülfsrechnungen:

1). . . . 211893 | 791813 | 3,736
```
                   635679
                   -------
                   1561340
                   1483251
                   -------
                    780890
                    635679
                   -------
                   1452110
```

2). Da 0,736 Jahr = 0,736 . 365 Tage sind, so erhält man nach der Multiplikation:

```
0,736 . 365
-----------
      3680
     4416
    2208
-----------
   268,640
```

für 0,736 Jahr abgerundet: 269 Tage oder, den Monat zu 30 Tage angenommen:

8 Monate und 29 Tage.

Auflösung 2. Vorstehende Auflösung 1 ergab das Resultat, dass die gesuchte Anzahl n der Jahre eine gebrochene ist. Wollte man nun den im bürgerlichen Leben in Antwort der Frage 16, bezw. der Frage 15 der 1. Aufl., ausgesprochenen üblichen Gebrauch, auch auf derartige Aufgaben ausdehnen in welchen nach der Zeit (nach der Anzahl der Jahre, Termine) gefragt ist, so muss, da man im voraus nicht beurteilen kann, ob die gesuchte Zeit, bezw. die Zahl der Jahre eine ganze oder gebrochene Zahl ist, wie folgt verfahren werden:

Erkl. 85. Ist die gesuchte Zahl der Jahre eine gebrochene Zahl, so kann dies ein gemischter Bruch, aber auch ein echter Bruch sein; im letzteren sind die Ganzen = Null. Ist die gesuchte Anzahl der Jahre ein echter Bruch, so wird an der Art der Auflösung der Aufgabe nichts geändert, als dass in der Formel 18 für $n = 0$ gesetzt wird, wobei zu berücksichtigen ist, dass der Ausdruck: $1{,}0p^n$ (für $n = 0$) = 1 wird, denn nach dem Satze:

„Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist = 1“ folgt, dass:

$$1{,}0p^0 = 1 \text{ ist.}$$

(Siehe Kleyers Lehrb. der Potenzen u. Wurzeln.)

Man bestimme die gesuchte Zeit n nach der allgemeinen Hauptzinseszinsformel 1^a:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n$$

wie es in vorstehender Auflösung 1 geschehen ist.

Erhält man für n eine ganze Zahl, so ist die Aufgabe fertig gelöst; erhält man aber für n eine gebrochene (gemischte) Zahl, wie in dieser Aufgabe, nämlich: $n = 3{,}736 = 3 + 0{,}736$ Jahre, so sind die Ganzen (siehe Erkl. 85), in dieser Aufgabe die Zahl 3, richtig gefunden, und es bleibt nur noch der Bruchteil (nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch) zu bestimmen übrig.

Zu diesem Zwecke benutze man vorstehende Formel 18:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n\left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

und substituiere in dieselbe die gegebenen Grössen:

$$K = 6000$$
$$k = 5000$$
$$p = 5$$

und für n, welches die Zahl der ganzen Jahre angibt, die für dieselbe bereits nach Formel 1 gefundene Zahl 3 (siehe Erkl. 85).

Hiernach erhält man:

$$\text{b)} \ldots 6000 = 5000\,.\,1{,}05^3\left(1 + \frac{0{,}05}{m}\right)$$

und aus dieser Gleichung kann man den Jahresbruchteil $\frac{1}{m}$ bestimmen.

Aus der Gleichung b). erhält man:

$$\frac{6000}{5000 \,.\, 1{,}05^3} = 1 + \frac{0{,}05}{m}$$

oder:

$$1 + \frac{0{,}05}{m} = \frac{6000}{5000 \,.\, 1{,}05^3}$$

$$\frac{0{,}05}{m} = \frac{6}{5 \,.\, 1{,}05^3} - 1$$

$$\frac{1}{m} = \frac{6}{0{,}05 \,.\, 5 \,.\, 1{,}05^3} - \frac{1}{0{,}05} = \frac{6 \,.\, 100}{5 \,.\, 5 \,.\, 1{,}05^3} - \frac{100}{5}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{24}{1{,}05^3} - 20$$

Den ersten Summanden rechts, wie in nebenstehender Hülfsrechnung 3). berechnet, erhält man:

$$\frac{1}{m} = 20{,}7321 - 20$$

oder:

$$\frac{1}{m} = 0{,}7321 \text{ Jahre.}$$

Verwandelt man nach der Hülfsrechnung 4). den Decimalbruchteil 0,7321 eines Jahres in Monate und Tage, so heisst die Lösung der Aufgabe, wenn man den im bürgerlichen Leben, in Antwort der Frage 16 ausgesprochenen, üblichen Gebrauch auch auf derartige Aufgaben ausdehnt:

Vor 3 Jahren 8 Monaten und 27 Tagen war die Summe von 6000 ℳ, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden, 5000 ℳ wert.

Die Resultate der Auflösung 1 und der Auflösung 2 ergeben somit einen Unterschied von 2 Tagen (siehe Erkl. 86).

Hülfsrechnungen:

3). $log \frac{24}{1{,}05^3} = log\, 24 - 3\, log\, 1{,}05$

Nun ist: $log\, 24 = 1{,}3802112$

$-3 \,.\, log\, 1{,}05 = -3 \,.\, 0{,}0211893 = -0{,}0635679$

$log \frac{24}{1{,}05^3} = 1{,}3166433$

6412

21

20,9

mithin:

$$\frac{24}{1{,}05^3} = \underline{20{,}7321}$$

4). Da: 0,7321 Jahre = 0,7321 . 365 Tage sind, so erhält man nach der Multiplikation:

```
0,7321 . 365
       36605
      43926
     21963
    267,2165
```

für 0,7321 Jahre, abgerundet: 267 Tage oder, den Monat zu 30 Tage angenommen:

8 Monate 27 Tage.

Aufgabe 29. Vor wieviel Jahren hatte ein Kapital, welches zu 4 % auf Zinseszinsen aussteht, nur den dritten Teil seines jetzigen Wertes?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

„ 18: $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Hülfsrechnungen:

```
1). . . . . 170333|4771213|28,011
               340666
               1364553
               1362664
                 188900
                 170333
                  185670
                  170333
```

2). Da 0,011 Jahre $=$ 0,011 . 365 Tage sind, so erhält man nach der Multiplikation:

```
365 . 0,011
     365
    365
   4,015
```

für 0,011 Jahre, abgerundet: 4 Tage.

Auflösung. Bezeichnet man das Anfangskapital mit dem allgemeinen Buchstaben k, so ist dem Sinne der Aufgabe entsprechend, das Endkapital $K = 3 . k$; berücksichtigt man ferner, dass der Prozentsatz $p = 4$ und die Anzahl n der Jahre gesucht ist, so ergibt sich nach der vorstehenden Formel 1[a]:

$$K = k . 1{,}0p^n$$

die Gleichung:

$$3 . k = k . 1{,}04^n$$

oder beiderseits mit der Grösse k dividiert, die Gleichung:

$$1{,}04^n = 3$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 22, bezw. nach der Erkl. 4 der 1. Aufl.:

$$n . log\, 1{,}04 = log\, 3$$

oder:

$$n = \frac{log\, 3}{log\, 1{,}04} =$$

$$n = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = \frac{4771213}{170333}$$

und nach der Hülfsrechnung 1).:

$$n = 28{,}011 \text{ Jahre.}$$

Verwandelt man den Decimalbruchteil 0,011 eines Jahres in Monate, bezw. Tage, so erhält man nach Hülfsrechnung 2).:

A). . . $n = 28$ Jahre und 4 Tage.

Auflösung 2. Vorstehende Auflösung ergab, dass die Anzahl n der Jahre eine gebrochene Zahl ist, und zwar, dass sie aus 28 ganzen Jahren und dem Jahresbruchteil 0,011 ($=$ 4 Tage) besteht.

Will man diesen Jahresbruchteil nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch finden, so hat man analog der Auflösung 2 der vorigen Aufgabe, die vorstehende Formel 18:

$$K = k . 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

zu benutzen.

Substituiert man in dieselbe:

für K den Wert $3 . k$

„ p „ „ 4 und

Hülfsrechnungen:

3). $log \frac{75}{1{,}04^{28}} = log\, 75 - 28 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 75 = & 1{,}8750613 \\ -28 \,.\, log\, 1{,}04 = & -0{,}4769324 \text{ (Hülfsr. 4)} \\ \hline log \frac{75}{1{,}04^{28}} = & 1{,}3981289 \\ & 1137 \\ \hline & 152 \\ & 139{,}2 \\ \hline & 12{,}8 \\ & 12{,}2 \end{array}$$

mithin:

$$\frac{75}{1{,}04^{28}} = \underline{25{,}01087}$$

4). . . . $28 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}0170333$

$$\begin{array}{r} 0{,}0170333 \\ .\,28 \\ \hline 1362664 \\ 340666 \\ \hline 0{,}4769324 \end{array}$$

5). Da 0,01087 Jahr = 0,01087 . 365 Tage sind, so erhält man nach der Multiplikation:

$$\begin{array}{r} 0{,}01087 \,.\, 365 \\ \hline 5435 \\ 6522 \\ 3261 \\ \hline 3{,}96755 \end{array}$$

für 0,01087 Jahr, abgerundet: 4 Tage.

für n, welches die Anzahl der ganzen Jahre ausdrückt, den nach der Auflösung 1 gefundenen Wert 28, so erhält man zur Bestimmung des gedachten Jahresbruchteils $\frac{1}{m}$ die Gleichung:

$$3 \,.\, k = k \,.\, 1{,}04^{28}\left(1 + \frac{0{,}04}{m}\right)$$

Diese Gleichung reduziert und nach dem gesuchten Jahresbruchteil $\frac{1}{m}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{3}{1{,}04^{28}} = 1 + \frac{0{,}04}{m} = 1 + \frac{4}{100 \,.\, m} = 1 + \frac{1}{25 \,.\, m}$$

$$\frac{1}{25m} = \frac{3}{1{,}04^{28}} - 1$$

oder:

$$\frac{1}{m} = \frac{75}{1{,}04^{28}} - 25$$

Substituiert man für den ersten Summanden rechts den nach Hülfsrechnung 3). gefundenen Wert, so erhält man für den Jahresbruchteil $\frac{1}{m}$:

$$\frac{1}{m} = 25{,}01087 - 25$$

oder:

$$\frac{1}{m} = 0{,}01087 \text{ Jahr.}$$

Verwandelt man diesen Jahresbruchteil 0,01087 in Monate, bezw. Tage, so erhält man hiefür nach Hülfsrechn. 5): = 4 Tage, oder für die gesuchte Zeit:

28 Jahre und 4 Tage,

dasselbe Resultat, wie vorher (siehe Erkl. 86).

Erkl. 86. Da bei denjenigen Aufgaben, in welchen nach der Zeit gefragt ist, der Unterschied der Resultate, welche man erhält, wenn man die mathematisch richtige Formel 1[a]:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

oder die im bürgerlichen Leben gebräuchliche Formel 18:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

der Berechnung zu Grunde legt, kein bedeutender ist (in Aufgabe 28 ist der Unterschied 2 Tage, in Aufgabe 29 ist der Unterschied $\frac{4}{100}$ Tag, bezw. = Null) und auch in den meisten Fällen im bürgerlichen Leben die Zeitbestimmung bis auf Tage genau nicht verlangt wird, so sollen weitere vorkommende Aufgaben in welchen nach der Zeit n gefragt ist, stets im Sinne der bequemeren und mathematisch richtigeren Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

gelöst werden, ausgenommen in den Fällen, in welchen die Berechnung auf andre Weise ausdrücklich verlangt wird.

*). **Aufgabe 30.** Einem Eingewanderten in Amerika wird eine grosse Strecke Waldes unter der Bedingung, dieselbe in Ackerland umzuwandeln, zu so niedrigen Preisen angewiesen, dass der Erlös aus dem abgetriebenen Holz nicht nur den Kaufschilling (siehe Erkl. 87), sondern auch noch die Kosten der Ausrodung deckt.

Von nun an nimmt der Besitzer 10 Jahre nacheinander, je zu Anfang des Jahres, bei einer Bank die Summe von 1000 Dollars (siehe Erkl. 88) auf, welche er zu Meliorierung (siehe Erkl. 89) des Gutes verwendet.

Wenn nun bei dieser Anleihe 6 % Zins aus Zins berechnet werden, welche Summe bleibt dem Kolonisten übrig, wenn er am Schlusse des 10ten Jahres das Gut für 25000 Dollar bar verkaufen kann?

Erkl. 87. Unter „Kaufschilling" oder Kaufpreis versteht man die Summe Geldes, welche bar für einen erkauften Gegenstand zu entrichten ist.

Formel 10:

$$K = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. Die gesuchte Summe x, welche dem Kolonisten am Schlusse des 10. Jahres nach dem Verkauf seines Gutes übrig bleibt, ist gleich der Summe von 25000 Dollar, welche er für sein Gut erhält, vermindert um die Schulden, welche auf dem Gute ruhen.

Man hat somit die Gleichung:

Erkl. 88. Der „Dollar" (vom deutschen Thaler) bildet die Rechnungseinheit sowohl für Münzen als auch für das Papiergeld der Vereinigten Staaten Nordamerikas. Der Golddollar ist = 4,15 deutsche Reichsmark.

Der Dollar wird in 100 gleiche Teile eingeteilt und ein solcher Teil „Cent" genannt.

Erkl. 89. Das Wort „Meliorierung" oder „Melioration" (vom lat. *Melioratia*) heisst Verbesserung und ist in der Landwirtschaft besonders gebräuchlich. In der Landwirtschaft versteht man unter „Melioration" Grundstücksverbesserung durch bessere, zweckmässigere Bearbeitung, Anlegung von Ent- und Bewässerungsgräben, Baumpflanzungen, Wege etc.

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}06^{10} = 10 \,.\, log\, 1{,}06$

Nun ist: $log\, 1{,}06 = 0{,}0253059$
$. 10$

$log\, 1{,}06^{10} = 0{,}2530590$

0471
119
121

mithin:

$1{,}06^{10} = \underline{1{,}79085}$

2). $0{,}79085 \,.\, 106$

474510
790850
83,83010

3). $\frac{83{,}83010}{6} = 13{,}97168$

Erkl. 90. Die Schulden, welche bis zu Ende des 10ten Jahres auf dem Gute ruhen, hätte man auch mittels folgender Betrachtung erhalten:

Die am Anfange des 1ten Jahres der Bank entlehnte Summe von 1000 Dollar = r, wächst nach der allgemeinen Zinseszinsformel Nr. 1b:

$$K = k \,.\, q^n$$

bis zu Ende des 10ten Jahres an, zu: $r \,.\, q^{10}$, weil die Summe r (= 1000) zehn Jahre auf Zinseszinsen steht.

Die zweite zu Anfang des 2ten Jahres der Bank entlehnte Summe von 1000 Dollar = r, steht nur 9 Jahre auf Zinseszinsen und wächst in diesen 9 Jahren, also bis zu Ende des 10ten Jahres an, zu: $r \,.\, q^9$ u. s. f.

Die am Anfange des 10ten Jahres der Bank entlehnte Summe von 1000 Dollar = r, wächst bis Ende dieses 10ten Jahres, also nach einem Jahre an, zu: $r \,.\, q$.

Die Summe der künftigen Werte der einzelnen der Bank entlehnten Summen bis zu Ende des 10ten Jahres, ist somit die gesuchte Schuld K; hiernach hat man:

$$K = r \,.\, q^{10} + r \,.\, q^9 + r \,.\, q^8 + \ldots . r \,.\, q^2 + r \,.\, q$$

Diese Glieder rechts bilden eine geometr. Reihe (siehe Erkl. 40 d. 2. Aufl.); schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung, so ist:

1) . . . $x = 25000$ — Schulden.

Die Schulden (siehe auch Erkl. 90) bilden der Aufgabe gemäss, das Endkapital K der am Anfange eines jeden Jahres, 10 Jahre lang, von der betreffenden Bank entlehnten Summen von je 1000 Dollar, wenn 6 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden.

Zur Berechnung der Schulden, bezw. des in Rede stehenden Endkapitals K benutzt man vorstehende Formel:

$$K = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Setzt man in derselben:

$r = 1000$, nämlich gleich der am Anfange eines jeden Jahres von der Bank entlehnten Summe;

$p = 6$

und

$n = 10$

so erhält man zur Berechnung der Schulden, welche auf dem Gute ruhen, die Gleichung:

$$2). \ldots K = \frac{1000 \,.\, 1{,}06\,(1{,}06^{10} - 1)}{0{,}06}$$

(siehe auch Erkl. 90)

Vorstehende Gleichung 1) geht somit über, in:

$$3). \ldots x = 25000 - \frac{1000 \,.\, 1{,}06(1{,}06^{10} - 1)}{0{,}06}$$

und hieraus erhält man x, wie folgt:

Scheidet man den gemeinschaftlichen Faktor 1000 aus und multipliziert Zähler und Nenner des Bruches rechts mit 100, so erhält man:

$$x = 1000\left(25 - \frac{106\,(1{,}06^{10} - 1)}{6}\right)$$

Wird der Summand $1{,}06^{10}$, wie in nebenstehender Hülfsrechnung 1). angegeben ist, berechnet, so erhält man:

$$x = 1000\left(25 - \frac{106(1{,}79085 - 1)}{6}\right)$$

oder:

$$x = 1000\left(25 - \frac{106 \,.\, 0{,}79085}{6}\right)$$

das Anfangsglied $a = rq$
der Quotient $q = q$ (= 1,0p, d. i. der Zinsfaktor)
das Endglied $t = r \,.\, q^{10}$
und man hat mit Hülfe der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41 der 2. Aufl.)

wenn man für t, q und a die angeführten Werte substituiert:

$$s = K = \frac{r \,.\, q^{10} \,.\, q - rq}{q - 1} = \frac{rq(q^{10} - 1)}{q - 1}$$

oder für den Zinsfaktor q, den Wert 1,0p substituiert, die allgemeine Gleichung:

$$1) \ldots K = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^{10} - 1)}{1{,}0p - 1}$$

(vergl. hiermit die Formel 10)

In Rücksicht der für r und p gegebenen Zahlen 1000 und 6 erhält man hiernach:

$$K = \frac{1000 \,.\, 1{,}06\,(1{,}06^{10} - 1)}{0{,}06}$$

nämlich denselben Wert für K wie in der Gleichung 2) der nebenstehenden Auflösung (siehe Erkl. 60 der 2. Aufl.).

Diese Gleichung geht nach den Hülfsrechnungen 2). und 3). über, in:

$$x = 1000 \,.\, (25 - 13{,}97168)$$

mithin ist:

$$x = 1000 \,.\, 11{,}02832$$

oder:

$$x = 11028{,}32$$

Dem Kolonisten bleibt somit nach dem Verkauf seines Gutes die Summe von:

11028 Dollar 32 Cent.

übrig.

*). **Aufgabe 31.** Ein Knabe erhält bei seiner Geburt ein Patengeschenk von 3000 Mark, welches ihm zu 4 % auf Zinseszinsen angelegt wird. Nachdem er das Alter von 20 Jahren erreicht hat, besucht er 4 Jahre lang die Universität und entnimmt von dem ihm nunmehr gehörigen Kapital zu Anfang eines jeden Studienjahres 1000 Mark.

Welche Summe bleibt ihm nach vollendeter Studienzeit?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 9:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. Bis der Knabe das Alter von 20 Jahren erreicht hat, sind die 3000 Mark nach vorstehender Formel 1ª:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

angewachsen, zu:

$$1) \ldots K = 3000 \,.\, 1{,}04^{20}$$

Von nun an entnimmt der zum Studenten herangewachsene Knabe am Anfange eines jeden Jahres — 4 Jahre lang — die Summe von 1000 Mark.

Am Anfange des 1ten Studienjahres stehen somit nur noch $(K - 1000)$ Mark auf Zinseszinsen, welche bis Ende des Jahres, wenn man den Zinsfaktor $q = 1{,}0p$ (siehe Erkl. 39, bezw. Erkl. 15 der 1. Auflage) einführt, anwachsen zu:

$$(K - 1000)\, q$$

wofür man

$$Kq - 1000 \,.\, q$$ schreiben kann.

Am Anfange des 2ten Studienjahres entnimmt der Student abermals 1000 Mark, mithin stehen nur noch

$$(Kq - 1000 \,.\, q - 1000) \text{ Mark}$$

auf Zinseszinsen, welche bis Ende desselben Jahres anwachsen, zu:

$$(Kq - 1000 \,.\, q - 1000) \,.\, q$$

wofür man schreiben kann:

$$Kq^2 - 1000\, q^2 - 1000\, q$$

Fährt man mit dieser Betrachtung auf analoge Weise fort, so bleibt dem Studenten bis zu Ende seines 4ten Studienjahres, die Summe:

$$x = Kq^4 - 1000 \,.\, q^4 - 1000 \,.\, q^3 - 1000 \,.\, q^2 - 1000 \,.\, q$$

Bei näherer Betrachtung dieser Gleichung findet man, dass die Glieder rechts, vom zweiten ab, eine **geometrische Reihe** (s. Erkl. 40 der 2. Aufl.) bilden; fasst man diese Glieder in eine Klammer zusammen und schreibt sie, nachdem der gemeinschaftliche Faktor: — 1000 ausgeschieden ist, in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

$$x = K \,.\, q^4 - 1000\,(q + q^2 + q^3 + q^4)$$

so hat man für das Anfangsglied a der geometrischen Reihe in der Klammer $= q$, für den Quotienten q der Reihe $= q$ und für das letzte Glied t der Reihe $= q^4$.

Setzt man diese Werte für a, q und t in die Summenformel

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 41 der 2. Aufl.)}$$

ein, so erhält man:

$$x = K \,.\, q^4 - 1000 \cdot \frac{q^4 \,.\, q - q}{q - 1}$$

oder:

$$x = K \,.\, q^4 - \frac{1000 \,.\, q\,(q^4 - 1)}{q - 1}$$

oder, für den Zinsfaktor q den Wert $1{,}0p = 1{,}04$ und für K den nach Gleichung 1). gefundenen Wert: $3000 \,.\, 1{,}04^{20}$ substituiert, gibt:

$$2). \;.\;.\; x = 3000 \,.\, 1{,}04^{20} \,.\, 1{,}04^4 - \frac{1000 \,.\, 1{,}04\,(1.04^4 - 1)}{0{,}04}$$

(vergl. hiermit die Entwicklung der Aufgabe in Erkl. 91)

Erkl. 91. In nebenstehender Auflösung ist keine Rücksicht auf die bereits entwickelte Formel 9a:

$$K = k \,.\, q^n - \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

genommen und dem Studierenden gezeigt, wie er bei ähnlichen Aufgaben zu verfahren hat, wenn ihm vorstehende Formel nicht bekannt wäre.

Benutzt man jene Formel 9a, so hat man zu beachten, dass: K der gesuchte Endwert x und k das Kapital ist, welches am Anfange eines jeden Jahres um die Summe $r = 1000$ vermindert wird, mithin nach der Gleichung 1) in nebenstehender Auflösung $= 3000 \,.\, 1{,}04^{20}$ ist; dass ferner q der Zinsfaktor $1{,}0p$, für die Aufgabe $= 1{,}04$ und n die Anzahl der Jahre ist, welche angibt, wie lange die Summe $r = 1000$ von dem auf Zinseszinsen stehenden Kapitale: $k = 3000 \,.\, 1{,}04^{20}$ weggenommen wird.

Mit Rücksicht dieser Werte, für k, q, n und r erhält man aus obiger Formel 9a, für das gesuchte Endkapital $K = x$, die Gleichung:

$$K = x = 3000 \,.\, 1{,}04^{20} \,.\, 1{,}04^4 - \frac{1000\,(1{,}04^4 - 1)}{0{,}04}$$

nämlich dieselbe Gleichung, wie die Gleichung 2). in nebenstehender Auflösung.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 3000 \,.\, 1{,}04^{24} = \log 3000 + 24 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$

$$\begin{array}{rr} & 0{,}0170333 \\ & .\,24 \\ \hline & 681332 \\ & 340666 \\ \hline 24 \,.\, \log 1{,}04 = & 0{,}4087992 \\ + \log 3000 = & 3{,}4771213 \\ \hline \log 3000 \,.\, 1{,}04^{24} = & 3{,}8859205 \\ & 9207 \end{array}$$

mithin:

$3000 \,.\, 1{,}04^{24} = \underline{7689{,}9}$

2). $\log 1{,}04^4 = 4 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$

$$\begin{array}{rr} & .\,4 \\ \hline 4 \,.\, \log 1{,}04 = & 0{,}0681332 \\ & 1116 \\ \hline & 216 \\ & 222{,}6 \end{array}$$

mithin:

$1{,}04^4 = \underline{1{,}16986}$

3). $0{,}16986 \,.\, 26000$

$$\begin{array}{r} 101916000 \\ 33972 \\ \hline 4416{,}36000 \end{array}$$

Vorstehende Gleichung 2). reduziert, gibt der Reihe nach:

$$x = 3000 \,.\, 1{,}04^{24} - \frac{1000 \,.\, 104 (1{,}04^4 - 1)}{4}$$

$$x = 3000 \,.\, 1{,}04^{24} - 1000 \,.\, 26 \,(1{,}04^4 - 1)$$

$$x = 3000 \,.\, 1{,}04^{24} - 26000 \,(1{,}04^4 - 1)$$

Berechnet man den Summanden: $3000 \,.\, 1{,}04^{24}$, wie in der Hülfsrechn. 1)., und den Summanden $1{,}04^4$, wie in der Hülfsrechn. 2). angegeben ist, so erhält man:

$$x = 7689{,}9 - 26000 \,(1{,}16986 - 1)$$

$$x = 7689{,}9 - 26000 \,.\, 0{,}16986$$

oder nach der Hülfsrechn. 3).:

$x = 7689{,}9 - 4416{,}36$. Dies gibt:

$$x = 3273{,}54.$$

Dem Studenten bleiben somit nach vollendeter Studienzeit von seinem Patengeschenke noch 3273 Mark 54 pf. übrig.

Aufgabe 32. Es hat Jemand von jetzt ab
nach Ablauf von drei Jahren 2500 ℳ
„ „ „ fünf „ 3800 „
„ „ „ sieben „ 5000 „
„ „ „ zehn „ 7200 „
zu zahlen, möchte aber die ganze Schuld auf einmal entrichten; nach wieviel Jahren muss das geschehen, wenn 4 % Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Um die Anzahl x der Jahre zu finden, nach welcher die am Ende des 3ten, 5ten, 7ten und 10ten Jahres zu zahlenden Summen, bezw. von 2500, 3800, 5000 und 7200 Mark ohne Zinsen auf einmal bezahlt werden können und ohne dass weder dem Gläubiger noch dem Schuldner Schaden erwächst, muss nach der Erkl. 92 angenommen werden, dass die Summe der Barwerte der nach den einzelnen Terminen von 3, 5, 7, 10 Jahren zu zahlenden Posten, bezw. von 2500, 3800, 5000, 7200 Mark, gleich dem Barwerte der auf einmal nach der gesuchten Anzahl x von

Erkl. 92. Ist ein Posten A nach a Jahren (Zeiteinheiten), ein andrer Posten B nach b Jahren, ein weiterer Posten C nach c Jahren u. s. f. ohne Zinsen zu entrichten, und sollen sämtliche Posten auf einmal, nämlich an dem sogenannten „mittleren Zahlungstermine t“ abgetragen werden, so muss zur Auffindung dieses mittleren Zahlungstermins, der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass weder dem Gläubiger noch dem Schuldner ein Verlust erwächst, dass somit die Summen der baren Werte der nach den einzelnen Terminen (von a, b, c Jahren) zu zahlenden Summen (A, B, C), gleich dem Barwerte der auf einmal nach dem mittleren Zahlungstermine von t Jahren zu zahlenden Summe: $(A + B + C)$ ist, wenn der Berechnung Zinseszinsen zu Grunde gelegt werden.

Nach der Erkl. 29, bezw. Erkl. 11 der 1. Aufl., und mit Hülfe der Formel 1[a]:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

in welcher:

K das Endkapital [in obiger Annahme bezw. die Grössen: $A, B, C \ldots, (A+B+C+\ldots)$] und

k das Anfangskapital, bezw. den baren Wert des Endkapitals K ausdrückt,

und in welcher:

p den Prozentsatz und

n die Anzahl der Jahre [in obiger Annahme bezw. die Grössen: $a, b, c \ldots (n)$] angibt,

erhält man:

a)... für den Posten A, zahlbar nach a Jahren, den baren Wert: $\frac{A}{1{,}0p^a}$

b)... für den Posten B, zahlbar nach b Jahren, den baren Wert: $\frac{B}{1{,}0p^b}$

c)... für den Posten C, zahlbar nach c Jahren, den baren Wert: $\frac{C}{1{,}0p^c}$ u. s. f.

und für die auf einmal zu zahlende Summe: $(A + B + C)$, zahlbar nach dem mittleren Zahlungstermin, nach t Jahren, den baren Wert:

$$\frac{(A + B + C + \ldots)}{1{,}0p^t}$$

Mit Hülfe vorstehender Erklärung besteht somit die Gleichung, bezw. die Formel:

Formel 20:

$$\frac{A}{1{,}0p^a} + \frac{B}{1{,}0p^b} + \frac{C}{1{,}0p^c} + \ldots = \frac{A + B + C + \ldots}{1{,}0p^t}$$

Jahren (d. i. nach der Erkl. 92 der mittlere Zahlungstermin t) zu zahlenden Summe von:

$$2500 + 3800 + 5000 + 7200 \text{ Mark ist.}$$

Hierin besteht der Sinn der anzusetzenden Gleichung (vgl. Formel 20 in Erkl. 92).

Nach der Erkl. 29, bezw. der Erkl. 11 der 1. Aufl., erhält man für den baren Wert k eines Kapitals K, welches nach n Jahren ohne Zinsen zahlbar ist, aus vorstehender Formel 1[a]:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

die Relation:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

Mit Hülfe dieser Relation erhält man, wenn 4% Zinseszinsen der Berechnung zu Grunde gelegt werden:

a). für den Barwert der nach 3 Jahren zu zahlenden Summe von

$$2500 \text{ Mark} = \frac{2500}{1{,}04^3}$$

b). für den Barwert der nach 5 Jahren zu zahlenden Summe von

$$3800 \text{ Mark} = \frac{3800}{1{,}04^5}$$

c). für den Barwert der nach 7 Jahren zu zahlenden Summe von

$$5000 \text{ Mark} = \frac{5000}{1{,}04^7}$$

d). für den Barwert der nach 10 Jahren zu zahlenden Summe von

$$7200 \text{ Mark} = \frac{7200}{1{,}04^{10}} \text{ und}$$

e). für den Barwert der nach der gesuchten Anzahl x von Jahren (d. i. nach dem mittleren Zahlungstermine) zu zahlenden Summe von:

$$(2500 + 3800 + 5000 + 7200) \text{ Mark} = \frac{2500 + 3800 + 5000 + 7200}{1{,}04^x}$$

Man hat somit nach vorstehendem, die Gleichung:

Hülfsrechnungen:

1). $\log \frac{25}{1,04^3} = \log 25 - 3 . \log 1,04$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist:} \quad \log 25 &=& 1,3979400 \\ -3 . \log 1,04 = -3 . 0,0170333 &=& -0,0510999 \\ \hline \log \frac{25}{1,04^3} &=& 1,3468401 \end{array}$$

8418

mithin:

$$\frac{25}{1,04^3} = \underline{22,225}$$

2). $\log \frac{38}{1,04^5} = \log 38 - 5 . \log 1,04$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist:} \quad \log 38 &=& 1,5797836 \\ -5 . \log 1,04 = -5 . 0,0170333 &=& -0,0851665 \\ \hline \log \frac{38}{1,04^5} &=& 1,4946171 \end{array}$$

6137

mithin:

$$\frac{38}{1,04^5} = \underline{31,233}$$

3). $\log \frac{50}{1,04^7} = \log 50 - 7 . \log 1,04$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist:} \quad \log 50 &=& 1,6989700 \\ -7 . \log 1,04 = -7 . 0,0170333 &=& -0,1192331 \\ \hline \log \frac{50}{1,04^7} &=& 1,5797369 \end{array}$$

7379

mithin:

$$\frac{50}{1,04^7} = \underline{37,996}$$

4). $\log \frac{72}{1,04^{10}} = \log 72 - 10 . \log 1,04$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist:} \quad \log 72 &=& 1,8573325 \\ -10 . \log 1,04 = -10 . 0,0170333 &=& -0,1703330 \\ \hline \log \frac{72}{1,04^{10}} &=& 1,6869995 \end{array}$$

9936

mithin:

$$\frac{72}{1,04^{10}} = \underline{48,640}$$

5). . . . $\log 140,094 = 2,1464071$
$+124$
$\log 140,094 = 2,1464195$

6).

$$\begin{array}{r|r|l} 170333 & 1207522 & 7,08 \\ & 1192331 & \\ \hline & 1519100 & \\ & 1362664 & \\ \hline & 156436 & \end{array}$$

1). $$\frac{2500}{1,04^3} + \frac{3800}{1,04^5} + \frac{5000}{1,04^7} + \frac{7200}{1,04^{10}} = \frac{2500 + 3800 + 5000 + 7200}{1,04^x}$$

(man vergleiche hiermit die Formel 20 in Erkl. 92)

Die ganze Gleichung durch 100 dividiert, gibt:

$$\frac{25}{1,04^3} + \frac{38}{1,04^5} + \frac{50}{1,04^7} + \frac{72}{1,04^{10}} = \frac{25 + 38 + 50 + 72}{1,04^x}$$

Berechnet man die einzelnen Summanden auf der linken Seite dieser Gleichung, wie in den Hülfsrechnungen 1), 2), 3) und 4) angegeben und bildet die in dem Zähler des Bruches rechts angedeutete Summe, so erhält man:

$$22,225 + 31,233 + 37,996 + 48,64 = \frac{185}{1,04^x}$$

oder:

$$140,094 = \frac{185}{1,04^x}$$

Hieraus erhält man:

$$1,04^x = \frac{185}{140,094}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x . \log 1,04 = \log 185 - \log 140,094$$

oder:

$$x = \frac{\log 185 - \log 140,094}{\log 1,04}$$

$$x = \frac{2,2671717 - 2,1464195}{0,0170333} \quad \text{(Hülfsrechn. 5)}$$

$$x = \frac{0,1207522}{0,0170333}$$

$$x = \frac{1207522}{170333}$$

Hieraus erhält man nach Hülfsrechnung 6) für die gesuchte Zeit, bezw. für den „mittleren Zahlungstermin“ nach welchem die einzelnen Schulden auf einmal zusammen bezahlt werden können, ohne dass dem Gläubiger oder dem Schuldner Schaden erwächst:

7,08 oder, abgerundet: **7 Jahre.**

*). **Aufgabe 33.** Ein Wucherer A wollte jemanden, der erst nach 3 Jahren zahlungsfähig ist und früher weder Kapital noch Zinsen zahlen kann, eine gewisse Summe auf solange nur zu sehr hohen, aber einfachen Zinsen leihen. Ein andrer Wucherer B wollte nur $^4/_5$ mal so viel Prozente, aber Zins von Zins haben. Da der Schuldner nun dem letzteren nach Verlauf von drei Jahren ebensoviel wiedergeben musste, als dem A, so fragt es sich, wieviel Prozente verlangte jeder?

Formel 1: $K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$

Auflösung.

Zwischen den Angeboten, welche die beiden Wucherer A und B dem Schuldner machen, besteht die Beziehung, dass die Endwerte K und K_1 derselben nach 3 Jahren einander gleich sind und hierin besteht der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung:

a). . . . $K = K_1$

Bezeichnet man das Kapital, welches sich der Schuldner bei einem oder dem andren Wucherer leihen will mit k und den gesuchten Prozentsatz, welchen der erste der Wucherer, nämlich der Wucherer A bei einfacher Zinsberechnung beansprucht, mit x, so hat man für die Summe K, welche der Schuldner nach 3 Jahren dem Wucherer A zu zahlen hat, die Gleichung:

b). . . $K = \frac{100+3x}{100} \cdot k$ (siehe Erkl. 93)

Erkl. 93. Bei einfacher Zinsberechnung wachsen:

100 ℳ in 1 Jahr bei x % an, zu $100+x$
100 „ „ 2 Jahren „ x % „ „ $100+2x$
100 „ „ 3 „ „ x % „ „ $100+3x$

Hiernach wächst

1 ℳ in 3 Jahren „ x % „ „ $\frac{100+3x}{100}$

folglich wachsen

k ℳ in 3 Jahren „ x % „ „ $\frac{100+3x}{100} \cdot k$

Siehe Kleyers Rechenbücher, speziell dasjenige, welches über die einfache Zinsrechnung handelt.

Da ferner der gesuchte Prozentsatz, welchen sich der Wucherer A bedungen hat, mit x bezeichnet wurde, so ist der Aufgabe entsprechend der Prozentsatz, welchen sich der Wucherer B ausbedingt $= \frac{4}{5}x$ und da derselbe Zinseszinsen beansprucht, so hat man mit Hülfe vorstehender Formel:

$$K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

für die Summe K_1, welche der Schuldner dem Wucherer B nach 3 Jahren zu zahlen hat:

c). . . $K_1 = k \cdot \left(\frac{100+\frac{4}{5}x}{100}\right)^3$

Erkl. 94. Nach der Formel:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

kann man für $\left(1+\frac{x}{125}\right)^3$ schreiben:

$$\left(1+\frac{x}{125}\right)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot \frac{x}{125} + 3\cdot 1\cdot\frac{x^2}{125^2} + \frac{x^3}{125^3}$$

oder:

$$\left(1+\frac{x}{125}\right)^3 = 1 + \frac{3x}{125} + \frac{3x^2}{125^2} + \frac{x^3}{125^3}$$

Erkl. 95. $\frac{3}{100} - \frac{3}{125} = \frac{15}{500} - \frac{12}{500} = \frac{3}{500}$

Erkl. 96. $\frac{3.125^3}{500} = \frac{3.125.125^2}{500} = \frac{3.125^2}{4}$

Erkl 97. Die unrein quadrat. Gleichung:

$$x^2 + 3.125x = \frac{3.125^2}{4}$$

wird wie folgt aufgelöst:

Beiderseits den halben Koeffizienten von x, nämlich $\frac{3.125}{2}$, im Quadrat addiert, gibt:

$$x^2 + 3.125x + \left(\frac{3.125}{2}\right)^2 = \frac{3.125^2}{4} + \left(\frac{3.125}{2}\right)^2$$

oder:

$$\left(x+\frac{3.125}{2}\right)^2 = \frac{3.125^2}{4} + \frac{9.125^2}{4}$$

$$x + \frac{3.125}{2} = \pm\sqrt{(3+9)\cdot\frac{125^2}{4}}$$

$$x = -\frac{3.125}{2} \pm \sqrt{\frac{12.125^2}{4}}$$

$$x = -\frac{3.125}{2} + \sqrt{3.125^2}$$

Das negative Vorzeichen bleibt, als der Aufgabe nicht entsprechend, weg.

(Siehe Kleyers Lehrbuch der quadratischen Gleichungen.)

Setzt man die Werte für K und K_1 aus den Gleichungen b). und c). in die Gleichung a). ein, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots \frac{100+3x}{100}\cdot k = k\left(\frac{100+\frac{4}{5}x}{100}\right)^3$$

Diese Gleichung durch k dividiert und weiter reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{100+3x}{100} = \left(\frac{100+\frac{4}{5}x}{100}\right)^3$$

$$1+\frac{3}{100}x = \left(1+\frac{4}{500}x\right)^3$$

$$1+\frac{3}{100}x = \left(1+\frac{x}{125}\right)^3$$

$$1+\frac{3}{100}x = 1 + \frac{3x}{125} + \frac{3x^2}{125^2} + \frac{x^3}{125^3}$$

(siehe Erkl. 94)

$$\frac{3x}{100} = \frac{3x}{125} + \frac{3x^2}{125^2} + \frac{x^3}{125^3}$$

Glied für Glied dieser Gleichung durch x dividiert, gibt:

$$\frac{3}{100} = \frac{3}{125} + \frac{3x}{125^2} + \frac{x^2}{125^3}$$

oder:

$$\frac{x^2}{125^3} + \frac{3x}{125^2} = \frac{3}{100} - \frac{3}{125}$$

$$\frac{x^2}{125^3} + \frac{3x}{125^2} = \frac{3}{500}$$

(siehe Erkl. 95)

Den Koeffizienten von x^2 entfernt, gibt:

$$x^2 + \frac{3x.125^3}{125^2} = \frac{3.125^3}{500}$$

oder:

$$x^2 + 3.125.x = \frac{3.125^2}{4}$$

(siehe Erkl. 96)

Löst man nunmehr diese unrein quadratische Gleichung auf, so erhält man:

$$x = -\frac{3.125}{2} + \sqrt{3.125^2}$$

(siehe Erkl. 97)

oder:

Hülfsrechnungen:

1). $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$

```
 1
2|200
  189
34|1100
   1029
346|7100
    6924
    ....
    ....
```

2). $1{,}732 \cdot 125$

```
   8660
  3464
 1732
216,500
```

$$x = -\frac{375}{2} + 125\sqrt{3}$$

$$x = -187{,}5 + 125 \cdot 1{,}732 \text{ (Hülfsrech. 1)}$$

$$x = -187{,}5 + 216{,}5 \text{ (Hülfsrechn. 2)}$$

mithin:

$$x = 29$$

Der Wucherer A verlangte somit $x = 29\,\%$ einfache Zinsen, während der Wucherer B, dem Sinne der Aufgabe entsprechend:

$$\frac{4}{5}x = \frac{4}{5} \cdot 29 = \frac{116}{5} = 23\tfrac{1}{5}\,\%$$

Zinseszinsen beanspruchte.

Aufgabe 34. Eine 4prozentige Anleihe von 300000 Mark soll durch jährliche Ratenzahlungen von je 30045 Mark getilgt werden. In wieviel Jahren kann dies geschehen?

Formel 6: $K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Bei der Berechnung der Anzahl der Jahre, nach welchen die Anleihe unter den gegebenen Bedingungen getilgt werden kann, hat man zu beachten, dass ein Kapital k von 300000 ℳ zu 4 % auf Zinseszinsen steht und dass von demselben am Ende eines jeden Jahres die Summe $r = 30045$ ℳ weggenommen (abgetragen) wird, und zwar so lange, bis der künftige Wert K jenes Kapitals = Null geworden ist. Hiernach kommt vorstehende Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

in Anwendung. In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 300000$ ℳ

der künftige Wert $K = 0$

die jährliche Verminderung

(Tilgung) $r = 30045$ ℳ

der Prozentsatz $p = 4$ und

die Anzahl d. Jahre $n = x$

Substituiert man diese Werte in vorstehende Formel, so erhält man:

$$0 = 300000 \cdot 1{,}04^x - \frac{30045\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04}$$

Um hieraus x berechnen zu können,

muss man diese Gleichung zunächst nach der Potenz $1{,}04^x$, wie folgt auflösen:

Die ganze Gleichung mit 0,04 multipliziert und die Klammer aufgelöst, gibt:

$$0 = 300000 \,.\, 1{,}04^x \,.\, 0{,}04 - 30045 \,.\, 1{,}04^x + 30045$$

oder:

$$30045 \,.\, 1{,}04^x - 300000 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^x = 30045$$

$$1{,}04^x (30045 - 300000 \,.\, 0{,}04) = 30045$$

und hieraus erhält man zunächst:

$$1{,}04^x = \frac{30045}{30045 - 300000 \,.\, 0{,}04}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn. 1).:

$$1{,}04^x = \frac{30045}{18045}$$

Diese Exponentialgleichung logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, log\, 1{,}04 = log\, 30045 - log\, 18045$$

oder:

$$x = \frac{log\, 30045 - log\, 18045}{log\, 1{,}04}$$

$$x = \frac{4{,}4777722 - 4{,}2563569}{0{,}0170333}$$

$$x = \frac{0{,}2214153}{0{,}0170333}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hülfsrechnung 2). für die gesuchte Anzahl der Jahre nach welchen die Anleihe getilgt werden kann:

$$x = 13 \text{ Jahre.}$$

Hülfsrechnungen:

1). $\frac{30045}{30045 - 300000 \,.\, 0{,}04} = \frac{30045}{30045 - 12000} = \frac{30045}{18045}$

2). . . . $\frac{0{,}2214153}{0{,}0170333} = \frac{2214153}{170333}$

```
170333|2214153|12,99
       170333
       510823
       340666
       1701570
       1532997
       16857300
```

$\frac{2214153}{170333} = 12{,}99$ oder abgerundet $= 13$

(siehe Erkl. 86.)

*). **Aufgabe 35.** Man soll die Zinsen und Zinseszinsen berechnen, welche ein Kapital von 7200 Mark zu $4\frac{7}{8}\,\%$ in $12\frac{1}{4}$ Jahr ergeben.

Formel 18: $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Auflösung.

Bezeichnet man die gesuchten Zinsen und Zinseszinsen, welche das Kapital von 7200 ℳ nach $12\frac{1}{4}$ Jahren zu $4\frac{7}{8}\,\%$ ergeben mit x und den künftigen Wert dieses Kapitals nach den $12\frac{1}{4}$ Jahren mit K, so ergibt sich die gesuchte Grösse x aus der Gleichung:

1). . . . $x = K - 7200$

Erkl. 98. Da in der Aufgabe $p = 4\frac{7}{8}$ ist, so setze man:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100}, \text{ woraus man:}$$

$$1{,}0p = \frac{100 + 4\frac{7}{8}}{100} = \frac{100 + \frac{39}{8}}{100} = \frac{\frac{800+39}{8}}{100}$$

oder:

1). $1{,}0p = \dfrac{839}{800}$ erhält.

Man hätte auch $4\frac{7}{8}$ in den Decimalbruch 4,875 verwandeln können, wonach man:

2). $1{,}0p = 1{,}04875$ erhalten hätte.

Dies gibt jedoch bei der weiteren logarithmischen Rechnung ein weniger genaues Resultat, als dasjenige, welches man erhält, wenn für $1{,}0p$ den Wert aus Gleichung 1). in Rechnung bringt.

Da ferner:

$$0{,}0p = \frac{p}{100} = \frac{4\frac{7}{8}}{100} = \frac{\frac{39}{8}}{100} \text{ ist,}$$

so erhält man:

3). $0{,}0p = \dfrac{39}{800}$

Erkl. 99. Man könnte den Bruch:

$$\frac{7200 \,.\, 3239}{3200} \text{ noch abkürzen,}$$

dies ist jedoch bei der logarithmischen Ausrechnung ohne besonderen Vorteil.

Da nun die Anzahl der Jahre, welche angibt, wie lange das Kapital von 7200 Mark Zinsen und Zinseszinsen trägt, eine gebrochene (gemischte) Zahl ist, so findet man den künftigen Wert K mittelst vorstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

Setzt man in diese Formel, für:

das auf Zinseszinsen steh. Kapital $k = 2700$ ℳ,
den Prozentsatz $p = 4\frac{7}{8}$, bezw. für $1{,}0p = \frac{839}{800}$
und für $0{,}0p = \frac{39}{800}$ (s. Gleich. 1 u. 3 in der Erkl. 98),
für die Anzahl n der ganzen Jahre $= 12$
und endlich für den Bruchteil m des letzten Jahres $= 4$ ein,

so erhält man:

$$K = 7200 \cdot \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \left(1 + \frac{\frac{39}{800}}{4}\right)$$

oder:

$$K = 7200 \cdot \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \left(1 + \frac{39}{3200}\right)$$

$$K = 7200 \cdot \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \frac{3200 + 39}{3200}$$

$$K = 7200 \cdot \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \frac{3239}{3200}$$

$$K = \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \frac{7200 \,.\, 3239}{3200} \quad \text{(s. Erkl. 99)}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log K = 12\,(\log 839 - \log 800) + \log 7200 + \log 3239 - \log 3200$$

$$\begin{aligned}
\text{Nun ist:}\quad \log 839 &= 2{,}9237620 \\
-\log 800 &= -2{,}9030900 \\
&\overline{0{,}0206720} \\
&\phantom{=-0{,}02067}.\,12 \\
&\overline{\phantom{0{,}0}413440} \\
&\phantom{=-0{,}}206720 \\
12\,(\log 839 - \log 800) &= 0{,}2480640 \\
+\log 7200 &= 3{,}8573325 \\
+\log 3239 &= 3{,}5104109 \\
&\overline{7{,}6158074} \\
-\log 3200 &= -3{,}5051500 \\
\log K &= 4{,}1106574 \\
&\phantom{=-4{,}110}6570 \\
&\phantom{=-4{,}11065}\overline{4}
\end{aligned}$$

mithin ist:

2). . . . $K = 12902$ Mark.

Für die gesuchten Zinsen und Zinseszinsen x erhält man aus den Gleichungen 1). und 2).:

$$x = 12902 - 7200$$

oder:

$$x = 5702 \text{ Mark.}$$

*). **Aufgabe 36.** Jemand stellt gegen ein Darlehen von 2000 Mark auf 3 Jahre einen Schuldschein von 2660 Mark aus. Wieviel $^0/_0$ Zinseszinsen wurde hierbei in Anrechnung gebracht?

Formel 1[a]: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung.

Das Darlehen von 2000 Mark ist ein 3 Jahre lang auf Zinseszinsen zu $x\,^0/_0$ ausgeliehenes Kapital, dessen Endwert $= 2660$ Mark ist.

Unter Benutzung vorstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

erhält man:

$$2660 = 2000 \,.\, 1{,}0x^3$$

oder:

$$1{,}0x^3 = \frac{2660}{2000}$$

$$1{,}0x = \sqrt[3]{\frac{2660}{2000}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log 1{,}0x = \frac{1}{3}[\log 2660 - \log 2000]$$

Nach nebenstehender Hülfsrechnung erhält man hieraus zunächst:

$$1{,}0x = 1{,}0997$$

Da nun:

$$1{,}0x = \frac{100 + x}{100} \text{ ist,}$$

so erhält man aus:

$$\frac{100 + x}{100} = 1{,}0997$$

$$x = 100 \,.\, 1{,}0997 - 100$$

oder:

$$x = 109{,}97 - 100 = 9{,}97$$

Das Darlehen war somit zu 9,97 oder abgerundet zu 10 $^0/_0$ auf Zinseszinsen ausgeliehen.

Hülfsrechnung.

$$\log 1{,}0x = \frac{1}{3}(\log 2660 - 2000)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 2660 &= 3{,}4248816 \\ -\log 2000 &= -3{,}3010300 \\ \hline & 0{,}1238516 \\ & \cdot \tfrac{1}{3} \\ \hline \log 1{,}0x &= 0{,}0412839 \\ & \phantom{=-0{,}041}2742 \\ \hline & \phantom{=-0{,}04128}97 \end{aligned}$$

mithin ist:

$$1{,}0x = \underline{1{,}0997}$$

*). **Aufgabe 37.** Für eine nach 10 Jahren zahlbare Summe erhält man bei einem Abzug (Diskont) von $3\frac{3}{4}$ % Zinseszinsen die Barsumme von 20000 Mark, wie hoch beläuft sich jene Summe?

Erkl. 100. Es ist:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100} = \frac{100 + 3\frac{3}{4}}{100}$$

oder:

$$1{,}0p = \frac{100 + 3{,}75}{100} = \frac{103{,}75}{100}$$

mithin:

$$\underline{1{,}0p = 1{,}0375}$$

Hülfsrechnung:

$$log\, x = log\, 200000 + 10 \,.\, log\, 1{,}0375$$

Nun ist: $log\, 1{,}0375 = 0{,}0159881$

$$\begin{array}{rr} & .\,10 \\ \hline & 0{,}1598810 \\ + log\, 20000 = & 4{,}3010300 \\ \hline log\, x = & 4{,}4609110 \\ & 8978 \\ \hline & 132 \\ & 120{,}8 \\ \hline & 11{,}2 \\ & 10{,}5 \end{array}$$

mithin:

$$\underline{x = 28900{,}87}$$

Formel 1^a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung.

Die nach 10 Jahren zahlbare Summe x muss gleich der erhaltenen Barsumme von 20000 Mark plus den Zinseszinsen sein, welche diese 20000 Mark zu $3\frac{3}{4}$ % nach Ablauf von 10 Jahren bringen und welche in Abzug gebracht wurden (Leibnizi'sches Interusurium, siehe die Erkl. 30).

Denkt man sich die erhaltene Barsumme von 20000 ℳ zu $3\frac{3}{4}$ % 10 Jahre lang auf Zinseszinsen ausgeliehen, so erhält man jene Barsumme plus den Zinseszinsen zu $3\frac{3}{4}$ %, nämlich die gesuchte nach 10 Jahren zahlbare Summe x. Setzt man daher in vorstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

$K = x$
$k = 20000$
$p = 3\frac{3}{4}$, bezw. $1{,}0p = 1{,}0375$ (s. Erkl. 100)
und $n = 10$

so erhält man:

$$x = 20000 \,.\, 1{,}0375^{10}$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hülfsrechnung für die nach 10 Jahren zahlbare Summe:

$x = 28900{,}87$ oder abgerundet:
$x = 28900$ Mark.

*). **Aufgabe 38.** Ein Beamter muss bei seiner ersten Anstellung eine Kaution von 3600 Mark stellen. Er leiht sich dieses Geld und verspricht, da er erst im 3. Jahre zahlungsfähig wird, jährlich eine solche Summe abzutragen, dass seine Schuld nach 7 Jahren getilgt ist. Wie hoch beläuft sich eine solche abzutragende Summe, wenn 6 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formel 1^a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 6: $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Da der Beamte erst im 3. Jahre anfängt zahlungsfähig zu werden, so sind die von ihm geliehenen 3600 Mark während den ersten 2 Jahren, nach vorstehender Formel 1^a:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

Erkl. 101. Da der Beamte in 7 Jahren seine Schuld tilgen will, aber während den zwei ersten Jahren nichts bezahlen kann, so bleiben nur noch fünf Jahre übrig, in welchen er seine Schuld abtragen kann.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}06^5 = 5 \,.\, \log 1{,}06$

Nun ist: $\log 1{,}06 = 0{,}0253059$

$\phantom{Nun ist: \log 1{,}06 = 0{,}02530} .5$

$\log 1{,}06^5 = 0{,}1265295$

5210

85

mithin:

$1{,}06^5 = \underline{1{,}3382}$

2). $\log x = \log 3600 + 7 \,.\, \log 1{,}06 + \log 0{,}06 - \log 0{,}3382$

Nun ist: $\log 1{,}06 = 0{,}0253059$

.7

$7 \,.\, \log 1{,}06 = 0{,}1771413$

$+ \log 3600 = 3{,}5563025$

$+ \log 0{,}06 = 0{,}7781513 - 2$

$4{,}5115951 - 2$

$- \log 0{,}3382 = +0{,}5291736 - 1$

$- \quad +$

$\log x = 3{,}9824215 - 1$

oder: $\log x = 2{,}9824215$

4205

10

mithin ist:

$x = \underline{960{,}33 \text{ Mark.}}$

angewachsen zu:

1). $K = 3600 \,.\, 1{,}06^2$

Dieses Kapital $3600 \,.\, 1{,}06^2$ will er nun in 5 Jahren (siehe Erkl. 101) indem er am Ende eines jeden Jahres eine Summe x abträgt, tilgen. Zur Berechnung dieser Summe x kommt vorstehende Formel 6:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

in Anwendung. In derselben bedeutet:

- K den künftigen Wert der Schuld, welche getilgt, nämlich $= 0$ werden soll,
- k das Anfangskapital von welchem am Ende eines jeden Jahres eine Summe r, in dieser Aufgabe $= x$, weggenommen werden soll und welches nach Gleichung 1). $= 3600 \,.\, 1{,}06^2$ *M.* beträgt;

ferner bedeutet:

- p den Prozentsatz, derselbe ist $= 6$, und
- n die Anzahl der Jahre, welche angibt, wie lange das Kapital $3600 \,.\, 1{,}06^2$ um die Summe r $(= x)$ vermindert wird und in dieser Aufgabe $= 5$ ist.

Mit Rücksicht dieser Werte geht vorstehende Formel 6 über in:

$$0 = 3600 \,.\, 1{,}06^2 \,.\, 1{,}06^5 - \frac{x \,.\, (1{,}06^5 - 1)}{0{,}06}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst und reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x \,.\, (1{,}06^5 - 1)}{0{,}06} = 3600 \,.\, 1{,}06^7$$

$$x = \frac{3600 \,.\, 1{,}06^7 \,.\, 0{,}06}{1{,}06^5 - 1}$$

$$x = \frac{3600 \,.\, 1{,}06^7 \,.\, 0{,}06}{1{,}3382 - 1} \quad \text{(siehe Hülfsrechnung 1)}$$

$$x = \frac{3600 \,.\, 1{,}06^7 \,.\, 0{,}06}{0{,}3382}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 3600 + 7 \,.\, \log 1{,}06 + \log 0{,}06 - \log 0{,}3382$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hülfsrechnung 2). für die gesuchte Summe x, welche der Beamte je am Ende der letzten 5 Jahre abtragen muss:

$$x = 960 \text{ Mark } 33 \text{ pf.}$$

*). **Aufgabe 39.** Es muss jemand 12 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres die Summe von 2000 Franken bezahlen. Diese jährlichen Zahlungen sollen durch eine einmalige Zahlung nach 4 Jahren abgetragen werden; welches ist diese zu zahlende Summe, wenn 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Erkl. 102. Man hätte auch, analog der Aufgabe 32 und der Erkl. 92, die Summe der baren Werte der nach den Terminen von 1, 2, 3, 4 . . . 12 Jahren zu zahlenden Geldsummen von je 2000 Franken gleich dem baren Werte der nach 4 Jahren zu zahlenden Summe x setzen können, das Resultat blieb sich hierbei dasselbe.

Die nebenstehende Auflösung ist für diese Aufgabe jedoch einfacher.

Erkl. 103. Aus den Gleichungen 1)., a). und b). in nebenstehender Auflösung erhält man:

$$\frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} = k\,.\,1{,}0p^n$$

oder:

$$\text{I.} \quad . \quad . \quad . \quad k = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe, welche bei ähnlichen Aufgaben als Formel benutzt werden kann.

Formel 5: $K = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 1ª: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

Auflösung.

Zur Berechnung der gesuchten Summe x, welche nach 4 Jahren statt den am Ende eines jeden Jahres 12 Jahre lang zu zahlenden Summen von je 2000 Frank bezahlt werden kann, ohne dass hierdurch dem Gläubiger noch dem Schuldner Schaden erwächst, beachte man in dieser Aufgabe (siehe die Erkl. 102), dass der künftige Wert K der am Ende eines jeden Jahres zu zahlenden Summe nach Ablauf von 12 Jahren gleich dem künftigen Werte K_1 der nach 4 Jahren zu zahlenden Summe x nach Ablauf von 12 Jahren sein muss; somit ist der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung ausgedrückt, durch:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad K = K_1$$

Den künftigen Wert K der am Ende eines jeden Jahres zu zahlenden Summen von je 2000 Frank findet man mittels vorstehender Formel 5:

$$a). \quad . \quad . \quad K = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

wenn man in derselben:

$r = 2000$, $p = 5$ und $n = 12$ setzt,

aus der Gleichung:

$$2). \quad . \quad . \quad K = \frac{2000\,.\,(1{,}05^{12} - 1)}{0{,}05}$$

Den künftigen Wert K_1 der nach 4 Jahren zahlbaren Summe x findet man mittels der vorstehenden Formel 1ª:

$$b). \quad . \quad . \quad K = k\,.\,1{,}0p^n$$

wenn man in derselben: $K = K_1$, $k = x$, $p = 5$ und $n = 12 - 4 = 8$ (denn das Kapital x trägt dem Gläubiger bis Ende des 12. Jahres nur 8 Jahre lang Zinseszinsen, da er es erst nach 4 Jahren erhält) setzt, aus der Gleichung:

$$3). \quad . \quad . \quad K_1 = x\,.\,1{,}05^8$$

Aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). folgt die Gleichung:

$$\frac{2000\,(1{,}05^{12}-1)}{0{,}05} = x\,.\,1{,}05^{8}$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{2000\,(1{,}05^{12}-1)}{0{,}05\,.\,1{,}05^{8}} \quad \text{(siehe Erkl. 103)}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn. 1:

$$x = \frac{2000\,.\,0{,}79586}{0{,}05\,.\,1{,}05^{8}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 2000 + \log 0{,}79586 - (\log 0{,}05 + \log 1{,}058^{8})$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl}
\log 2000 & = & 3{,}3010300 \\
\log 0{,}79586 & = & 0{,}9008367-1 \\
\hline
 & & 4{,}2018667-1 \\
-(\log 0{,}05+\log 1{,}05^{8}) & = & +0{,}8684844-2 \\
 & & - \qquad\qquad + \\
\hline
\log x & = & 3{,}3333823+1 \\
\end{array}$$

(s. Hülfsrechn. 2)

$$\begin{array}{rcl}
\text{oder: } \log x & = & 4{,}3333823 \\
 & & 667 \\
\hline
 & & 156
\end{array}$$

mithin ist die gesuchte Summe:

$x = 21546{,}8$ oder abgerundet:

$= 21547$ Frank.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}05^{12} = 12\,.\log 1{,}05$

$$\begin{array}{rcl}
\text{Nun ist: } \log 1{,}05 & = & 0{,}0211893 \\
 & & .\,12 \\
\hline
 & & 423786 \\
 & & 211893 \\
\hline
\log 1{,}05^{12} & = & 0{,}2542716 \\
 & & 2580 \\
\hline
 & & 136 \\
 & & 145
\end{array}$$

mithin ist:

$1{,}05^{12} = 1{,}79586$

und

$1{,}05^{12}-1 = 1{,}79586-1 = 0{,}79586$

2). $-(\log 0{,}05+\log 1{,}05^{8}) = -(0{,}8684844-2)$

$$\begin{array}{rcl}
\text{denn: } \log 1{,}05 & = & 0{,}0211893 \\
 & & .\,8 \\
\hline
\log 1{,}05^{8} & = & 0{,}1695144 \\
+\log 0{,}05 & = & +0{,}6989700-2 \\
\hline
\log 0{,}05+\log 1{,}05^{8} & = & 0{,}8684844-2
\end{array}$$

*). **Aufgabe 40.** Ein Kaufmann hat einem Fabrikanten drei Wechsel ausgestellt; den einen zu 600 Mark zahlbar in 4 Monaten; den zweiten zu 1500 Mark zahlbar in 8 Monaten, den dritten von 700 Mark zahlbar in 10 Monaten. Er wünscht diese drei Wechsel durch einen einzigen mit der Verfallzeit von einem Jahr zu ersetzen. Welches wird der Betrag dieses Wechsels sein, wenn $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen gerechnet werden?

Auflösung.

Damit weder dem Kaufmann, noch dem Fabrikanten Schaden erwächst, muss, analog wie in der Aufgabe 32, angenommen werden, dass die Summe der Barwerte y, z und u der drei ausgestellten Wechsel gleich dem Bar-

werte v des Wechsels ist, dessen Betrag x berechnet werden soll.

Man hat hiernach die Gleichung:

1). $y + z + u = v$

Um nun die Barwerte dieser Wechsel, z. B. den Barwert y des nach 4 Monaten zahlbaren ersten Wechsels von 600 Mark zu finden, stelle man sich die Frage:

„Welche Summe y wächst in 4 Monaten bei $4\frac{1}{2}$ % zu 600 Mark an?"

Zur Lösung dieser Frage beachte man, dass: 100 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % in 1 Jahr anwachsen, zu $100 + 4\frac{1}{2}$, mithin wachsen nach der Erkl. 76 und nach der Erkl. 29 diese 100 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % in 4 Monaten, bezw. in $\frac{1}{3}$ Jahr (siehe Erkl. 104) an, zu:

$$100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}$$

1 ℳ wächst unter denselben Bedingungen an, zu:

$$\frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}{100}$$

mithin wachsen y Mark in 4 Monaten bei $4\frac{1}{2}$ % an, zu:

$$y \cdot \frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}{100}$$

und dies soll = 600 Mark sein.

Hiernach besteht die Gleichung:

$$y \cdot \frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}{100} = 600$$

aus welcher man den baren Wert y des ersten Wechsels, mit:

2). $y = \dfrac{100 . 600}{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}$ findet.

Auf analoge Weise findet man für

Erkl. 104. Da nach der Erkl. 76 für den Fall, dass die Anzahl der Jahre ein echter Bruch ist, der Prozentsatz für diesen Jahresbruchteil proportional diesem Bruchteil angenommen wird, so muss man die Monate 4, 8, 10 in Jahre verwandeln, man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ Monate} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ 8 \quad " \quad = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ 10 \quad " \quad = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \text{Jahr.}$$

Der Zins für $\frac{1}{3}$ Jahr ist somit $\frac{4\frac{1}{2}}{3}$

" " " $\frac{2}{3}$ " " " $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 2}{3}$

" " " $\frac{1}{6}$ " " " $\frac{4\frac{1}{2}}{6}$

" " " $\frac{5}{6}$ " " " $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 5}{6}$

Erkl. 105.

100 ℳ wachs. in 1 Jahr bei $4\frac{1}{2}$% an, zu $100 + 4\frac{1}{2}$

100 „ „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ „ „ „ „ $100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}$

100 „ „ „ $\frac{2}{3}$ „ „ „ „ „ „ $100 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 2}{3}$

u. s. f.

Erkl. 106.

100 ℳ wachs. in 1 Jahr bei $4\frac{1}{2}$% an, zu $100 + 4\frac{1}{2}$

100 „ „ „ $\frac{1}{6}$ „ „ „ „ „ „ $100 + \frac{4\frac{1}{2}}{6}$

100 „ „ „ $\frac{5}{6}$ „ „ „ „ „ „ $100 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5}{6}$

die baren Werte z und u der zwei andren angestellten Wechsel:

$$3). \ldots z = \frac{100 \,.\, 1500}{100 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 2}{3}}$$ (siehe Erkl. 104 und 105)

$$4). \ldots u = \frac{100 \,.\, 700}{100 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5}{6}}$$ (siehe Erkl. 104 und 106)

und schliesslich findet man den baren Wert v des auszustellenden Wechsels x:

$$5). \ldots v = \frac{100 \,.\, x}{100 + 4\frac{1}{2}}$$

Aus den Gleichungen 1). bis 5). folgt die neue Gleichung:

$$\frac{100 \,.\, 600}{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}} + \frac{100 \,.\, 1500}{100 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 2}{3}} + \frac{100 \,.\, 700}{100 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5}{6}} = \frac{100 \,.\, x}{100 + 4\frac{1}{2}}$$

Diese Gleichung durch 100 dividiert und die Doppelbrüche weggeschafft, gibt:

$$\frac{600}{100 + \frac{9}{6}} + \frac{1500}{100 + \frac{18}{6}} + \frac{700}{100 + \frac{45}{12}} = \frac{x}{100 + \frac{9}{2}}$$

oder:

$$\frac{600}{100 + \frac{3}{2}} + \frac{1500}{100 + 3} + \frac{700}{100 + \frac{15}{4}} = \frac{x}{100 + \frac{9}{2}}$$

Addiert man die in den Nennern der einzelnen Glieder stehenden Zahlen, so erhält man:

$$\frac{600}{\frac{203}{2}} + \frac{1500}{103} + \frac{700}{\frac{415}{4}} = \frac{x}{\frac{209}{2}}$$

oder:

$$\frac{2 \,.\, 600}{203} + \frac{1500}{103} + \frac{4 \,.\, 700}{415} = \frac{2x}{209}$$

$$\frac{1200}{203} + \frac{1500}{103} + \frac{2800}{415} = \frac{2x}{209}$$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen geht diese Gleichung über, in:

Hülfsrechnungen:

1). . . 203 | 1200 | 5,911 abgerundet = 5,91
1015
1850
1827
230
203
270

2). . . 103 | 1500 | 14,563 abgerundet = 14,56
103
470
412
580
515
650
618
320

Hülfsrechnungen:

3). 415 | 2800 | 6,747 abgerundet = 6,75
2490
3100
2905
1950
1660
2900

4). . . 13,61 . 209
12249
27220
2844,49

$$5{,}91 + 14{,}56 + 6{,}75 = \frac{2x}{209}$$

oder in:

$$27{,}22 = \frac{2x}{209}$$

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{209 \,.\, 27{,}22}{2}$$

oder:

$$x = 209 \,.\, 13{,}61$$

Für den Betrag x des auszustellenden Wechsels, der nach einem Jahr fällig ist und die drei übrigen Wechsel ersetzt, erhält man somit nach Hülfsrechnung 4:

$$x = 2844{,}49$$

oder abgerundet:

$$= 2844 \text{ Mark.}$$

Aufgabe 41. Ein Kapital von 16000 Mark ist auf Zinseszinsen zu 5 % jährlich ausgeliehen; die Verwaltungskosten betragen für jedes Jahr 1 % des vergrösserten Kapitals und werden am Ende des Jahres abgezogen. Zu welcher Summe wird das Kapital in 20 Jahren anwachsen?

Formel 1^a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung.

Nach vorstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

ist das ausgeliehene Kapital von 16000 Mark bis zu Ende des 1. Jahres angewachsen, zu:

$$16000 \,.\, 1{,}05^1$$

Da nun hiervon 1 % für Verwaltungskosten abgezogen werden, so bleibt nach der Erkl. 107 nur noch $\frac{99}{100}$ dieser Summe, nämlich:

$$\frac{99}{100} \cdot 16000 \,.\, 1{,}05 \text{ übrig.}$$

Dieses letztere Kapital wächst bis Ende des 2. Jahres an, zu:

$$\frac{99}{100} \cdot 16000 \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}05$$

Da hiervon abermals 1 % für Verwaltungskosten abgezogen werden, so bleibt

Erkl. 107. Soll irgend eine Summe von A Mark um 1% vermindert werden und man soll berechnen, was übrig bleibt, so sage man:

1 % Abzug heisst:

von 100 Mark soll 1 Mark abgezogen werden, mithin wird

von 1 ℳ. der Betrag $\frac{1}{100}$ Mark und

„ A „ „ „ $\frac{1}{100} \cdot A$ Mark abgezogen.

Somit bleibt:

$$A - \frac{1}{100}A$$

oder:

$$\frac{100}{100}A - \frac{1}{100}A \text{ d. i. } \frac{99}{100}A \text{ übrig.}$$

Hülfsrechnung:

$$20 \, . \, log\,0{,}99 = 20 \, . \, (0{,}9956352 - 1)$$
$$= 19{,}9127040 - 20$$
$$= 0{,}9127040 - 1$$

nach der Erkl. 107 nur noch $\frac{99}{100}$ dieser Summe, nämlich:

$$\frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot 16000 \, . \, 1{,}05 \, . \, 1{,}05$$

oder:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot 16000 \, . \, 1{,}05^2 \text{ übrig.}$$

Dieses letztere Kapital wächst bis Ende des 3. Jahres an, zu:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot 16000 \, . \, 1{,}05^2 . \, 1{,}05$$

Da hiervon wiederum 1 % für Verwaltungskosten abgezogen werden, so bleibt am Ende des 3. Jahres nach der Erkl. 107 nur noch $\frac{99}{100}$ dieser Summe, nämlich:

$$\frac{99}{100} \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot 16000 \, . \, 1.05^2 . \, 1{,}05$$

oder:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^3 . \, 16000 \, . \, 1{,}05^3 \text{ übrig.}$$

Fährt man mit dieser Betrachtung fort, so wird man am Ende des 20. Jahres die noch übrig bleibende Summe von:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{20} \cdot 16000 \, . \, 1{,}05^{20} \text{ erhalten,}$$

welche gleich der in Frage stehenden Summe x ist, somit besteht die Gleichung:

$$x = \left(\frac{99}{100}\right)^{20} \cdot 16000 \, . \, 1{,}05^{20}$$

oder:

$$x = 16000 \, . \, 1{,}05^{20} . \, 0{,}99^{20}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\,x = log\,16000 + 20 \, . \, log\,1{,}05 + 20 \, . \, log\,0{,}99$$

Nun ist: $log\,1{,}05 = 0{,}0211893$
$\quad .20$

$= 0{,}4237860$

$+ log\,16000 = 4{,}2041200$

$= 4{,}6279060$

$+ 20 \, . \, log\,0{,}99 = 0{,}9127040 - 1$ (s. Hülfsrechn.)

$log\,x = 5{,}5406100 - 1$

oder:

$log x = 4,5406100$
6047
53
50
3
2,5

mithin ist:

$x = 34722,42$

Das Kapital von 16000 Mark ist somit nach 20 Jahren und mit Abzug der Verwaltungskosten angewachsen, zu:

34722 Mark 42 pf.

*). **Aufgabe 42.** Eine Schuld von 23889 Mark ist zu 5 % verzinst. Wenn nun hiervon nach 5 Jahren 1728 Mark und nach 8 Jahren 1494 Mark abgetragen werden; wie gross ist der Rest der Schuld, der nach 10 Jahren abgetragen wird, wenn Zinseszinsen der Berechnung zu Grunde gelegt werden?

Formel 1ª: $K = k . 1,0p^n$

Auflösung.

Die Schuld von 23889 Mark wächst bei 5 % Zinseszinsen bis Ende des 5. Jahres nach vorstehender Formel:

$$K = k . 1,0p^n$$

an, zu:

$$23889 . 1,05^5$$

Von dieser Summe werden 1728 ℳ abgetragen, mithin bleiben

$$(23889 . 1,05^5 — 1728) ℳ,$$

welche bis Ende des 8. Jahres, also nach drei weiteren Jahren anwachsen, zu:

$$(23889 . 1,05^5 — 1728) . 1,05^3 ℳ$$

Von dieser Summe werden nunmehr 1494 ℳ abgetragen, mithin bleiben:

$$[(23889 . 1,05^5 — 1728) . 1,05^3 — 1494] ℳ,$$

welche bis Ende des 10. Jahres, also nach zwei weiteren Jahren anwachsen, zu:

$$[(23889 . 1,05^5 — 1728) . 1,05^3 — 1494] . 1,05^2 ℳ$$

und dies ist der gesuchte Rest x der Schuld, welcher noch am Ende des 10. Jahres zu zahlen ist; somit hat man die Gleichung:

$$x = [(23889 . 1,05^5 — 1728) . 1,05^3 — 1494) . 1,05^2$$

oder:

Erkl. 108. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung 1). hätte man auch, wie folgt ableiten können:

Die Schuld 23889 Mark wächst bis Ende des 10. Jahres an, zu:

$$23889 . 1,05^{10}$$

Nun hat der Gläubiger nach 5 Jahren 1728 Mark erhalten, welche derselbe bis zu Ende des 10. Jahres, also 5 Jahre lang, auf Zinseszinsen legen kann, welche somit am Ende des 10. Jahres einen Wert von

$1728 . 1,05^5$ repräsentieren.

Ferner hat der Gläubiger nach 8 Jahren die Summe von 1494 Mark erhalten, welche bis Ende des 10. Jahres, also nach 2 Jahren, ein Kapital von:

$1494 . 1,05^2$ repräsentieren.

Der Rest x der Schuld ist somit:

$$x = 23889 . 1,05^{10} — 1728 . 1,05^5 — 1494 . 1,05^2$$

Dieses ist dieselbe Gleichung wie die Gleichung 1). in nebenstehender Auflösung.

$$x = [23889 \,.\, 1{,}05^5 \,.\, 1{,}05^3 - 1728 \,.\, 1{,}05^3 - 1494]\, 1{,}05^2$$

$$x = 23889 \,.\, 1{,}05^8 \,.\, 1{,}05^2 - 1728 \,.\, 1{,}05^3 \,.\, 1{,}05^2 - 1494 \,.\, 1{,}05^2$$

$$1)\ldots\; x = 23889 \,.\, 1{,}05^{10} - 1728 \,.\, 1{,}05^5 - 1494 \,.\, 1{,}05^2$$ (siehe Erkl. 56)

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 23889 \,.\, 1{,}05^{10} = 10 \,.\, log\, 1{,}05 + log\, 23889$

Nun ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 10
0,2118930
$+ log\, 23889 = 4{,}3781980$
$log\, 23889 \,.\, 1{,}05^{10} = 4{,}5900910$
0836
74
66,6
mithin ist: 7,4
$23889 \,.\, 1{,}05^{10} = 38912{,}67$ 7,7

2). $log\, 1728 \,.\, 1{,}05^5 = 5 \,.\, log\, 1{,}05 + log\, 1728$

Nun ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 5
5,1059465
$+ log\, 1728 = 3{,}2375437$
$log\, 1728 \,.\, 1{,}05^5 = 3{,}3434902$
4874
mithin ist: 28
$1728 \,.\, 1{,}05^5 = 2205{,}41$ 19,7

3). $log\, 1494 \,.\, 1{,}05^2 = 2 \,.\, log\, 1{,}05 + log\, 1494$

Nun ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 2
0,0423786
$+ log\, 1494 = 3{,}1743506$
$log\, 1494 \,.\, 1{,}05^2 = 3{,}2167292$
7200
mithin ist: 92
$1494 \,.\, 1{,}05^2 = 1647{,}14$ 105

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1, 2 und 3 geht diese Gleichung über, in:

$$x = 38912{,}67 - 2205{,}41 - 1647{,}14$$

und hieraus erhält man für den Rest x der Schuld nach 10 Jahren:

$$x = 35060{,}12 \text{ Mark oder abgerundet:}$$
$$= 35060 \text{ Mark.}$$

*). **Aufgabe 43.** Zum Neubau eines Krankenhospitals nahm eine Kirchengemeinde 150000 Mark bei einer Provinzialhülfskasse zu 4% auf und verpflichtete sich, diese Anleihe in den nächsten 50 Jahren durch gleiche jährliche Raten zu amortisieren (siehe Erkl. 109.) Wie hoch beläuft sich eine solche Rate?

Erkl. 109. Unter „Amortisation" (amortisieren, Ertötung, Auslöschung, Kraftloserklärung) versteht man hier die Abtragung oder Tilgung einer Schuld und zwar meistens mittelst Ratenzahlungen (siehe Erkl. 57).

Formel 6:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung.

Da die von der Kirchengemeinde aufgenommene Schuld durch jährliche Raten amortisiert (getilgt, abgetragen) werden soll, so kommt bei der Berechnung dieser Raten vorstehende Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

in Anwendung.

Setzt man in dieser Formel:

für das auf Zinseszinsen stehende Kapital $k = 150\,000$, nämlich die von der Kirchengemeinde aufgenommene Schuld;

für die Anzahl n der Jahre $= 50$;

für die am Ende eines jeden Jahres wegzunehmende Summe $r = x$, nämlich die gesuchte Ratenzahlung, durch welche die aufgenommene Schuld amortisiert (getilgt) werden soll, und endlich

für den künftigen Wert des auf Zinseszinsen stehenden und jährlich um die Summe x verminderten Kapitals k die Grösse 0, da die Schuld k amortisiert (getilgt), mithin $= 0$ werden soll,

so erhält man:

$$0 = 150000 \,.\, 1{,}04^{50} - \frac{x\,(1{,}04^{50} - 1)}{0{,}04}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x\,(1{,}04^{50} - 1)}{0{,}04} = 150000 \,.\, 1{,}04^{50}$$

$$x = \frac{150000 \,.\, 1{,}04^{50} \,.\, 0{,}04}{1{,}04^{50} - 1}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn. 1:

$$x = \frac{150000 \,.\, 1{,}04^{50} \,.\, 0{,}04}{6{,}10665}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, x = log\, 150000 + 50 \,.\, log\, 1{,}04 + log\, 0{,}04 - log\, 6{,}10665$$

Nun ist: $log\, 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,50$
$= 0{,}8516650$
$+ log\, 150000 = 5{,}1760913$
$+ log\, 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$= 6{,}6298163 - 2$
$- log\, 6{,}10665 = - 0{,}7858031$ (Hülfsr. 2)
$log\, x = 5{,}8440132 - 2$
oder: $log\, x = 3{,}8440132$
0109
23
18,9
4,1

mithin ist:
$num\, log\, x = 6982{,}537$

Damit die Kirchengemeinde die von ihr aufgenommene Schuld nach 50 Jah-

Hülfsrechnungen.

1). $log\, 1{,}04^{50} = 50 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist: $log\, 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,50$
$log\, 1{,}04^{50} = 0{,}8516650$
6619
31
30,5

mithin ist:
$num\, log\, 1{,}05^{50} = 7{,}10665$
und
$1{,}05^{50} - 1 = 7{,}10665 - 1 = 6{,}10665$

2). $log\, 6{,}10665 = 0{,}7857995$
$+ 35{,}5$
$0{,}7858031$

ren für amortisiert erklären kann, hat sie also am Ende eines jeden Jahres bei der Provinzialkasse die Summe von 6982 ℳ 54 pf. abzutragen.

Anmerkung 6. Die Ordnungsnummern der nachfolgenden Erklärungen sind die fortlaufenden Nrn. der Erklärungen in der 2. Auflage der ersten 5 Druckbogen.

*). **Aufgabe 44.** Zu welcher Summe würde 1 Pfennig bis Ende des Jahres 1884 angewachsen sein, wenn derselbe zur Zeit Christi Geburt auf Zinseszinsen zu 4 % gegeben worden wäre?

*). Die den Aufgaben beigedruckten Sternchen: *). deuten an, dass solche Aufgaben, mit Benutzung der am Schlusse beigefügten Hülfstafel I, auch **ohne Logarithmen** gelöst werden können.

Erkl. 110. Da das gesuchte Endkapital ein sehr grosses wird, mithin dasselbe nicht in Pfennige, wohl aber in Mark ausgedrückt werden soll, so beachte man vorweg, dass 100 Pfennige = 1 Mark, also 1 Pfennig = $\frac{1}{100}$ Mark ist.

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \mathit{log}\,1{,}04 = & 0{,}0170333393 \\ & .\,1884 \\ \hline & 681333572 \\ & 1362667144 \\ & 1362667144 \\ & 170333393 \\ \hline & 32{,}0908112412 \end{array}$$

(siehe Hülfstafel II) †).

†). Da die Zahl, mit welcher der $log\,1{,}04$ multipliziert werden soll, eine sehr grosse ist (1884), so benutze man, um wenigstens bis auf 7 Stellen ein ziemlich genaues Resultat zu erhalten, die in der Hülfstafel II für $1{,}0p$ angegebenen 10-stelligen Logarithmen.

Erkl. 111. Wie sich aus nebenstehender Auflösung ergibt, erhält man die gesuchte Summe nur bis auf Quadrillionen Mark genau, will man dieselbe bis auf 1 Mark genau berechnen, so muss man der Ausrechnung die in den *Callet*'schen Tafeln enthaltenen natürlichen Logarithmen, welche daselbst bis auf 48 Dezimalstellen genau angegeben sind, zu Grunde legen. Auf den Seiten 108—110 der *Callet*'schen Tafeln findet man die Anweisung hierzu.

Erkl. 112. Bestände die Erdkugel aus reinem Golde, so würde der Wert von ca. 10 solcher Erdkugeln ungefähr der Summe gleichkommen, zu welcher ein zur Zeit Christi Geb. zu 4 % auf Zinseszinsen ausgeliehener Pfennig bis Ende 1884 angewachsen wäre.

Formel 1^a: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

In Betreff der Formeln siehe das am Schlusse des Buches beigefügte Formelnverzeichnis.

Auflösung. Setzt man in vorstehender Formel 1^a:

$$k = \frac{1}{100} \quad \text{(siehe Erkl. 110)}$$

$$p = 4 \quad \text{und}$$

$n = 1884$, da von der Zeit Christi Geburt bis Ende des Jahres 1884, nämlich in der Zeit, in welcher jener Pfennig auf Zinseszinsen steht, 1884 Jahre verstreichen, so erhält man für die gesuchte Summe $K = x$, die Bestimmungsgleichung:

$$1).\ .\ x = \frac{1}{100}\,.\,1{,}04^{1884} = \frac{1{,}04^{1884}}{100}$$

Hieraus ergibt sich:

$$log\,x = 1884\,.\,log\,1{,}04 - log\,100$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn.:

$$log\,x = 32{,}0908112 - 2{,}0000000$$

mithin:

$$log\,x = 30{,}0908112$$

$$\begin{array}{r} 7869 \\ \hline 243 \\ 211{,}8 \\ \hline 31{,}2 \\ 31{,}7 \end{array}$$

und

$$numlog\,x = 1\,232569\,000000\,000000\,000000\,000000$$

Für die gesuchte Summe erhält man also, da für die siebente Stelle (für 9) eine etwas grössere Zahl aus dem Differenztäfelchen entnommen wurde, als sich für die letzte Differenz (31,2) ergeben würde, bis auf Quadrillionen genau:

1 Quintillion und 232569 Quadrillionen Mark. (Siehe die Erkl. 111.)

Aufgabe 45. Die Bevölkerung einer Stadt nimmt jährlich um 3 auf 100 zu und beträgt jetzt 15800 Seelen; nach wieviel Jahren wird dieselbe um 12737 zugenommen haben?

Erkl. 113. Der Zinsfuss p wird oft auf verschiedene Weise ausgedrückt. Man unterscheidet nämlich:

a). $p\,\%$ vom 100 oder kurzweg: $p\,\%$,

b). $p\,\%$ im 100 und

c). $p\,\%$ auf 100

Heisst es: $p\,\%$ vom 100 oder kurzweg $p\,\%$, so sollen sich 100 Einheiten nach Ablauf eines Jahres um p Einheiten vermehren oder vermindern; heisst es: $p\,\%$ im 100, so sollen sich schon $100-p$ Einheiten nach Verlauf eines Jahres um p Einheiten vermehren oder vermindern, und heisst es schliesslich: $p\,\%$ auf 100, wie in der Aufgabe 45, so sollen sich erst $100+p$ Einheiten nach Verlauf eines Jahres um p Einheiten vermehren oder vermindern.

Erkl. 114. Nach der Erkl. 113 erhält man den Zinsfaktor q für die Aufgabe 45, wie folgt: $p\,\%$ auf 100 heisst:

$100+p$ Geldeinheiten tragen bei $p\,\%$ nach Ablauf eines Jahres p Mark Zinsen,

mithin wachsen jene $100+p$ Geldeinheiten an zu $100+p+p$ oder zu $100+2p$ und hiernach wächst die Geldeinheit bei $p\,\%$ auf 100 an zu: $\frac{100+2p}{100+p}$ und dies ist für solche Fälle der allgemeine Zinsfaktor q.

Speziell für das in der Aufgabe 45 gegebene Zahlenbeispiel ist:

$$q = \frac{100+2.3}{100+3}$$

Hülfsrechnungen.

1). $log\,28537 = 4{,}4554083$
$\ -log\,15800 = 4{,}1986571$
$\ 0{,}2567512$

2). $log\,106 = 2{,}0253059$
$\ -log\,103 = 2{,}0128372$
$\ 0{,}0124687$

Formel 1^b: $K = k\,.\,q^n$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die Seelenzahl zu Anfang, also: $k = 15800$ und die Seelenzahl zu Ende, also: $K = 15800+12737$ direkt gegeben; ferner ergibt sich für den Zinsfaktor q, nach welchem die jährliche Vermehrung stattfindet, wie aus der Erkl. 114 ersichtlich ist: $q = \frac{100+2.3}{100+3}$ und schliesslich ist die Anzahl n der Jahre gesucht, also $= x$.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$15800+12737 = 15800\cdot\left(\frac{100+2.3}{100+3}\right)^x$$

und hieraus erhält man x wie folgt:

$$28537 = 15800\,.\left(\frac{106}{103}\right)^x$$

$$\left(\frac{106}{103}\right)^x = \frac{28537}{15800}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x\,.(log 106 - log 103) = log 28537 - log 15800$$

und $\quad x = \dfrac{log\,28537 - log\,15800}{log\,106 - log\,103}$

oder nach den Hülfsrechnungen 1). u. 2).:

$$x = \frac{0{,}2567512}{0{,}0124687}$$

und hieraus ergibt sich durch Division, dass die gesuchte Anzahl der Jahre $= 20{,}6$, also über 20 Jahre ist.

Aufgabe 46. Wieviel betragen für den Zinsfuss p die $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsen? oder: welches ist der $\frac{1}{m}$ jährige Zinsfuss, wenn der jährliche Zinsfuss $= p$ ist?

Die Berechnung soll nicht nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch (siehe Erkl. 7 oder Erkl. 38 der 2. Auflage), sondern streng mathematisch ausgeführt werden.

Formel 1^a: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

Auflösung. Ist der Zinsfuss $= p$ und man will mathematisch richtig die $\frac{1}{m}$tel jährigen Zinsen für 100 Geldeinheiten, oder was dasselbe sagt: den

Erkl. 115. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung 2). kann man sich als besondere Formel, nämlich als:

Formel 21: $p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$

merken.

Im übrigen beachte man die Antwort der Frage 15 oder der Frage 16 der 2. Auflage, bezw. die Anmerkung 18 oder die Erkl. 75 der 2. Auflage, in welcher bereits dieselbe Relation entwickelt wurde.

Erkl. 116. Nebenstehende Gleichung hätte man auch auf allgemeine Weise erhalten können, wenn man in der Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$ einmal:

$$k = k,\; n = n \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p}{100}$$

ein andermal:

$$k = k,\; n = m.n \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p_m}{100}$$

setzt. Man erhält hiernach:

$$k \cdot \left(\frac{100+p_m}{100}\right)^{m.n} = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

oder:

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^{m.n} = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = \frac{100+p}{100}$$

und schliesslich wie nebenstehend:

$$p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$$

entsprechenden Zinsfuss für $\frac{1}{m}$ Jahr berechnen, und zwar nicht nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch, nach welchem dieser $\frac{1}{m}$tel jährige Zinsfuss proportional dem jährlichen Zinsfuss p, also $= \frac{p}{m}$, angenommen wird (siehe Erkl. 7 oder Erkl. 38 der 2. Auflage), sondern nach mathematischen richtigen Grundsätzen, so muss man jene $\frac{1}{m}$tel jährigen Zinsen, bezeichnet durch: p_m, so bestimmen, dass der künftige Wert der Geldeinheit (oder irgend einer anderen Summe k, siehe Erkl. 116) nach Ablauf eines Jahres (oder auch einer gewissen Anzahl n von Jahren, siehe Erkl. 116) derselbe wird, **einerlei** ob man alle $\frac{1}{m}$ Jahr, also mmal, m Zeitabschnitte lang (bezw. auch $n \,.\, m$ mal, siehe Erkl. 116) die gesuchten $\frac{1}{m}$jährigen Zinsen: p_m zur Geldeinheit (bezw. zu jenem Kapital k) schlägt, oder ob man am Ende eines Jahres (bezw. am Ende von n Jahren) die jährlichen Zinsen p zum Kapital schlägt.

Setzt man deshalb in umstehender Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$ einmal:

$$k = 1,\; n = 1 \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p}{100}$$

ein andermal:

$$k = 1,\; n = m \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p_m}{100}$$

so erhält man für p_m die Bestimmungsgleichung:

$$1).\quad 1 \cdot \left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = 1 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^1$$

und hieraus ergibt sich für die gesuchten $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsen, bezw. für den gesuchten $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsfuss p_m, der Reihe nach:

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = \frac{100+p}{100}$$

$$\frac{100+p_m}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

$$p_m = 100 \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100$$

oder:

$$2). \;.\; p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$$

(siehe die Erkl. 115)

Aufgabe 47. Wieviel betragen bei $p\,\%$ $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsen die Zinsen jährlich, wenn die Zinsen alle $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapital geschlagen werden? oder:

Welches ist der jährliche Zinsfuss p, wenn der $\frac{1}{m}$ jährliche $= p_m$ ist?

Die Berechnung soll nicht nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch, sondern streng mathematisch ausgeführt werden.

Erkl. 117. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung 1). kann man sich als besondere Formel, nämlich als:

Formel 21[a]: $p = 100\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m - 100$

merken.

Auflösung. Löst man die in der Auflösung der vorigen Aufgabe aufgestellte Gleichung 1).:

$$1 \cdot \left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = 1 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^1$$

nach p auf, so erhält man für den gesuchten jährlichen Zinsfuss p der Reihe nach:

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = \frac{100+p}{100}$$

$$100+p = 100\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m$$

oder:

$$1). \;.\; p = 100\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m - 100$$

(siehe die Erkl. 117 und 116).

Aufgabe 48. In einem Staate leben gegenwärtig 1 Million Menschen. Wenn nun von 36 Menschen durchschnittlich einer stirbt und auf 28 jährlich eine Geburt kommt, ausserdem jährlich 2500 Menschen einwandern; nach wieviel Jahren wird dieser Staat circa $1\frac{1}{2}$ Million Einwohner zählen?

Formel 4:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die Bevölkerung zu Anfang, also $k = 1\,000\,000$, die Bevölkerung zu Ende, also $K = 1\,500\,000$, und die bis zu Ende eines jeden Jahres durch Einwanderung zunehmende Seelenzahl, also $r = 2500$ direkt gegeben.

Ferner ergibt sich für den Prozentsatz p, durch welche die jährliche Vermehrung der in jedem Jahr vorhandenen Seelen ausgedrückt ist, nach der Erkl. 118: $p = \frac{50}{63}$ und schliesslich ist die Anzahl n der Jahre gesucht, also $= x$.

Erkl. 118. Zur Berechnung des Zinsfusses p, nach welchem die jährliche Vermehrung stattfindet, mache man folgende Betrachtung:

Auf 28 Menschen kommt 1 Geburt,

„ 1 „ „ $\frac{1}{28}$ „

mithin kommen:

a). . . auf 100 Menschen $\frac{100}{28}$ Geburten.

Ferner kommt:

auf 36 Menschen 1 Sterbefall,

„ 1 „ $\frac{1}{36}$ „

mithin kommen:

b). . . auf 100 Menschen $\frac{100}{36}$ Sterbefälle.

Aus den Relationen a). und b). ergibt sich für die jährliche Vermehrung für 100, also für p:

$$p = \frac{100}{28} - \frac{100}{36} \text{ oder:}$$

$$p = \frac{900 - 700}{252} = \frac{200}{252} \text{ oder:}$$

$$\text{c)}. . . p = \frac{50}{63}$$

Erkl. 119. Setzt man in $1{,}0p \left(= \frac{100+p}{100}\right)$ für $p = \frac{50}{63}$, so erhält man:

$$\text{a)}. . . 1{,}0p = \frac{100 + \frac{50}{63}}{100} = \frac{6300 + 50}{6300} =$$

$$\frac{6350}{6300} = \frac{127}{126} \text{ und}$$

$$\text{b)}. . . 0{,}0p \; (= 1{,}0p - 1) = \frac{127}{126} - 1 =$$

$$\frac{127 - 126}{126} = \frac{1}{126}$$

Hülfsrechnungen.

1). $log\, 18150 = 4{,}2588766$
$- log\, 13150 = 4{,}1189258$
$0{,}1399508$

2). $log\, 127 = 2{,}1038037$
$log\, 126 = 2{,}1003705$
$0{,}0034332$

Mit Benutzung vorstehender Formel und nach der Erkl. 119 erhält man somit die Bestimmungsgleichung:

$$1500000 = 1000000 . \left(\frac{100 + \frac{50}{63}}{100}\right)^x + \frac{2500 . \left(\left(\frac{100 + \frac{50}{63}}{100}\right)^x - 1\right)}{\frac{100 + \frac{50}{63}}{100} - 1}$$

oder nach der Erkl. 119:

$$1500000 = 1000000 . \left(\frac{127}{126}\right)^x + \frac{2500 \left(\frac{127}{126}\right)^x - 1}{\frac{1}{126}}.$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$15000 = 10000 . \left(\frac{127}{126}\right)^x + 25 \cdot 126 \cdot \left(\left(\frac{127}{126}\right)^x - 1\right)$$

$$10000 \cdot \left(\frac{127}{126}\right)^x + 25 \cdot 126 \cdot \left(\frac{127}{126}\right)^x = 15000 + 25 . 126$$

$$\left(\frac{127}{126}\right)^x \cdot \left(10000 + 3150\right) = 15000 + 3150$$

$$\left(\frac{127}{126}\right)^x = \frac{18150}{13150}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x . (log\, 127 - log\, 126) = log\, 18150 - log\, 13150$$

oder:

$$x = \frac{log\, 18150 - log\, 13150}{log\, 127 - log\, 126}$$

und nach den Hülfsrechnungen 1). und 2).:

$$x = \frac{0{,}1399508}{0{,}0034332}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Anzahl x der Jahre:

$$x = 40{,}76 \text{ Jahre.}$$

Nach 41 Jahren wird hiernach die Seelenzahl von $1\frac{1}{2}$ Million erreicht, bezw. überschritten sein, da Bruchteilen von Jahren in solchen Aufgaben keine Bedeutung beizumessen ist.

Aufgabe 49. Jemand hat eine Schuld von 50 000 Mark zu tilgen, die zu 4% steht. Er zahlt alle Jahre 10 000 Mark ab, die Zinsen mitgerechnet. Nach wieviel Jahren hat er die Schuld getilgt und wieviel hat er im letzten Jahr noch zu zahlen?

Erkl. 120. Bis zu Ende des 5. Jahres verbleibt nach der Formel 6:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

von der zu zahlenden Schuld ein Rest K:

$$K = 50000 \,.\, 1{,}04^5 - \frac{10000\,(1{,}04^5 - 1)}{0{,}04}$$

oder:

$$K = 50000 \,.\, 1{,}216653 - \frac{10000\,(1{,}216653 - 1)}{0{,}04}$$

(siehe Hülfsrechnung 1)

$$K = 60832{,}65 - 250000 \,.\, 0{,}216653$$

$$K = 60832{,}65 - 54163{,}25$$

$$K = 6669{,}4 \text{ Mark.}$$

Hülfsrechnung.

1). $log\,1{,}04^5 = 5 \,.\, log\,1{,}04 = 5 \,.\, 0{,}0170333$
$= 0{,}0851665$

1478
―――
187
178,5
―――
8,5
7,1

mithin ist:

$$1{,}04^5 = 1{,}216653$$

Formel 7: $$k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die zu tilgende Summe, bezw. das Anfangskapital, welches am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summe vermindert werden soll, also $k = 50\,000$ Mark gegeben; dann ist die Summe, um welche jenes Kapital am Ende eines jeden Jahres vermindert wird, also $r = 10\,000$ Mark, ebenso ist der Zinsfuss $p = 4$ gegeben, und schliesslich ist die Anzahl n der Jahre gesucht, also $= x$.

Mit Benutzung vorstehender Tilgungsformel (siehe Formel XVII in Anmerkung 22 oder Formel 7 in der Erkl. 56 der 2. Auflage) erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$50000 = \frac{10000\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^x}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$5 = \frac{1{,}04^x - 1}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^x}$$

$$5 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^x = 1{,}04^x - 1$$

$$1 = 1{,}04^x - 0{,}2 \,.\, 1{,}04^x$$

$$1{,}04^x\,(1 - 0{,}2) = 1$$

$$1{,}04^x \,.\, 0{,}8 = 1$$

$$1{,}04^x = \frac{1}{0{,}8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$1{,}04^x = 1{,}25$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, log\,1{,}04 = log\,1{,}25$$

$$x = \frac{log\,1{,}25}{log\,1{,}04} \text{ oder:}$$

$$x = \frac{0{,}0969100}{0{,}0170333}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Anzahl x der Jahre:

$$x = 5{,}102 \text{ Jahre.}$$

Nach dem somit für x gefundenen Wert ist der Rest der Schuld nach einem Bruchteil des 6. Jahres zu zahlen, sollen die Ratenzahlungen aber stets am Ende eines Jahres gezahlt werden, so berechne man zunächst den Rest K_5 der Schuld, welcher am Ende des 5. Jahres noch verbleibt, und dann den Wert dieser Schuld bis zu Ende des 6. Jahres, womit die

am Ende des 6. Jahres fällige Ratenzahlung gefunden wird.

Nach der Erkl. 120 erhält man für den Rest R_5 am Ende des 5. Jahres:

$$R_5 = 6669{,}4 \text{ Mark}$$

und dieser Rest wächst bis Ende des 6. Jahres mit den einfachen 4prozentigen Zinsen an zu:

$$6669{,}4 \,.\, 1{,}04 \quad \text{oder zu:}$$
$$6936{,}18 \text{ Mark.}$$

Nach 6 Jahren ist also die Schuld getilgt, wenn am Ende der ersten 5 Jahre je 10000, am Ende des 6. Jahres aber 6936 Mark 18 pf. gezahlt werden.

Aufgabe 50. Ein Kapital k ist zum Zinsfuss p ausgeliehen. In welcher Zeit wird es zur Summe K angewachsen sein, wenn das auf Zinseszinsen stehende Kapital jährlich um die Summe r vermehrt (oder vermindert) wird?

Formeln 4 und 6:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \pm \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. Diese Aufgabe ist gelöst, sobald man vorstehende Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \pm \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

als Bestimmungsgleichung mit der darin vorkommenden Unbekannten n betrachtet und diese Gleichung nach n auflöst.

Man erhält der Reihe nach:

$$K \,.\, 0{,}0p = k \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p \pm r\,(1{,}0p^n - 1)$$
$$K \,.\, 0{,}0p = k \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p \pm r \,.\, 1{,}0p^n \mp r$$
$$k \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p \pm r \,.\, 1{,}0p^n = K \,.\, 0{,}0p \pm r$$
$$1{,}0p^n\,(k \,.\, 0{,}0p \pm r) = K \,.\, 0{,}0p \pm r$$
$$1{,}0p^n = \frac{K \,.\, 0{,}0p \pm r}{k \,.\, 0{,}0p \pm r}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$n \,.\, \log 1{,}0p = \log\,(K \,.\, 0{,}0p \pm r) - \log\,(k \,.\, 0{,}0p \pm r)$$

und hieraus erhält man:

$$1).\quad n = \frac{\log\left(\frac{K \,.\, p}{100} \pm r\right) - \log\left(\frac{k \,.\, p}{100} \pm r\right)}{\log 1{,}0p}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass von den doppelten Vorzeichen die oberen bei einer jährlichen Vermehrung, die unteren bei einer jährlichen Verminderung zu benutzen sind.

Aufgabe 51. Bei einer Gewerbekasse machte ein Handwerker ein Anlehen von k Mark; zur Tilgung derselben musste er am Ende eines jeden Jahres n Jahre lang r Mark bezahlen. Wieviel % berechnete die Gewerbekasse?

Formel 7: $k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$

Auflösung. Diese Aufgabe ist gelöst, sobald man vorstehende Tilgungsformel:

$$k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$$

als Bestimmungsgleichung mit der darin vorkommenden Unbekannten p betrachtet und diese Gleichung nach p auflöst.

Um diese Gleichung nach p auflösen zu können, muss man zunächst $1{,}0p$ als Unbekannte betrachten (siehe Erkl. 6 oder Erkl. 25 der 2. Auflage), dementsprechend in dieser Gleichung $0{,}0p = 1{,}0p - 1$ setzen und nach dieser Grösse $1{,}0p$ auflösen; man erhält der Reihe nach:

$$k = \frac{r(1.0p^n - 1)}{(1{,}0p - 1) \cdot 1{,}0p^n}$$

$$k \cdot (1{,}0p - 1) \cdot 1{,}0p^n = r(1{,}0p^n - 1)$$

$$k \cdot 1{,}0p \cdot 1{,}0p^n - k \cdot 1{,}0p^n = r \cdot 1{,}0p^n - r$$

$$k \cdot 1{,}0p^{n+1} - k \cdot 1{,}0p^n - r \cdot 1{,}0p^n = -r$$

$$k \cdot 1{,}0p^{n+1} - (k + r) \cdot 1{,}0p^n = -r$$

oder:

$$1).\quad 1{,}0p^{n+1} - \frac{k+r}{k} \cdot 1{,}0p^n = -\frac{r}{k}$$

und hier stösst man auf eine unreine Gleichung vom höheren, nämlich vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, deren allgemeine Auflösung hier nicht weiter verfolgt werden kann.

Erkl. 121. Das Nähere über die Auflösung höherer Gleichungen, als Gleichungen vom 3., 4., ... Grade findet man in Kleyer's Lehrbücher über die höheren Gleichungen.

Ist für n ein spezieller Zahlenwert gegeben, ist z. B. $n = 5$, so geht die allgemeine Gleichung 1). über in:

$$1{,}0p^{5+1} - \frac{k+r}{k} \cdot 1{,}0p^5 = -\frac{r}{k}$$

oder in:

$$1{,}0p^6 - \frac{k+r}{k} \cdot 1{,}0p^5 = -\frac{r}{k}$$

und man hat eine unreine Gleichung vom 6. Grade (siehe Erkl. 121), deren Auflösung durch probieren wie folgt stattfinden kann.

Erkl. 122. Ist der Prozentsatz p gesucht, so ist, wie aus nebenstehender Auflösung ersichtlich, die Lösung solcher Aufgaben ziemlich umständlich.

Derartige Aufgaben kommen in der Praxis jedoch nur in höchst seltenen Fällen vor, indem der Zinsfuss (Prozentsatz) p fast immer eine bekannte Grösse repräsentiert.

Man setzt für p der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, ... und untersucht, ob einer dieser Werte der Gleichung genügt oder zwischen welchen zweien die-

ser Werte p liegen muss, findet man nämlich, dass einer dieser Werte für p gesetzt der Gleichung genügt, so ist die Aufgabe gelöst, findet man hingegen, was meistens der Fall sein wird, dass keiner dieser Werte genügt, dass z. B. $p = 3$ gesetzt einen zu kleinen Wert, $p = 4$ aber gesetzt einen zu grossen Wert ergibt, so muss offenbar p zwischen 3 und 4 liegen; um im letzten Fall p genauer zu finden, setze man für p verschiedene Werte, die zwischen 3 und 4 liegen und schliesse in analoger Weise wie vorhin die Grenzen für den wahren Wert von p durch analoges fortgesetztes Verfahren immer enger ein. (Siehe die späteren Aufgaben 55 u. 75 und die Erkl. 121 u. 122.)

Aufgabe 52. Zu welcher Summe waren 17091 Mark, die am 22. Oktober 1869 auf Zinsen zu $4\frac{2}{3}$ % gegeben wurden, bis zum 7. März 1883, wo sie wieder zurückgezahlt wurden, angewachsen?

Formel 18ᵃ: $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{m_1}{m} \,.\, 0{,}0p\right)$

Siehe Erkl. 75a der 2. Auflage, oder setze in der Formel XVI der 1. Auflage:

$$\frac{1}{m} = \frac{m_1}{m}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist das auf Zinseszinsen ausgeliehene Kapital $k = 17091$ Mark und der Prozentsatz $p = 4\frac{2}{3}$, bezw. nach der Erkl. 123 der Wert für $1{,}0p$ mit $\frac{157}{150}$ direkt gegeben. Ferner ist nach der Erkl. 124 die Zeit vom 22. Okt. 1869 bis 7. März 1883, während welcher jenes Kapital auf Zinseszinsen steht, $= 13\frac{136}{365}$ Jahre, hiernach ist also n, d. i. die Anzahl der ganzen Jahre $= 13$ und der echte Jahresbruchteil $\frac{m_1}{m} = \frac{136}{365}$. Schliesslich ist der künftige Wert, also $K = x$ nämlich gesucht.

Mittelst vorstehender Formel erhält man hiernach:

$$x = 17091 \cdot \left(\frac{157}{150}\right)^{13} \cdot \left(1 + \frac{7 \,.\, 136}{150 \,.\, 365}\right)$$

oder:

$$x = 17091 \cdot \left(\frac{157}{150}\right)^{13} \cdot \frac{54750 + 952}{54750}$$

$$x = \left(\frac{157}{150}\right)^{13} \cdot \frac{17091 \,.\, 55702}{54750}$$

Erkl. 123. Da $p = 4\frac{2}{3}$, nämlich ein solcher Bruch ist, der sich nicht in einen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt, so muss man beachten, dass

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100} \text{ ist, dass also für}$$

diesen Fall:

$$\text{a).}\quad 1{,}0p = \frac{100 + 4\frac{2}{3}}{100} = \frac{100 + \frac{14}{3}}{100} = \frac{300 + 14}{300} = \frac{314}{300} = \frac{157}{150} \text{ ist}$$

und dass

$$\text{b).}\quad 0{,}0p = \frac{4\frac{2}{3}}{100} = \frac{7}{150} \text{ ist.}$$

Erkl. 124. Vom 22. Oktober 1869 bis zum 7. März 1883 verfliessen: $13\frac{136}{365}$ Jahre; denn:

vom 22. Okt. 1869 bis 1. Nov. desselben Jahres verfliessen 9 Tage
„ 1. Nov. bis 1. Dez. verfliessen 30 „
„ 1. Dez. bis 1. Jan. 1870 „ 31 „
ferner verfliessen vom 1. Jan. 1870 bis 1. Jan. 1883 13 Jahre
und schliesslich verfliessen:

vom 1. Jan. 1883 bis 1. Febr. desselben Jahres 31 Tage
„ 1. Febr. bis 1. März verfliessen 28 „
„ 1. März bis 7. März 1883 „ 7 „

Im ganzen verfliessen also:

13 Jahre 136 Tage oder:

$13\frac{136}{365}$ Jahre.

Erkl. 125. Man hätte die Aufgabe auch so lösen können, dass man erst den künftigen Wert des ausgeliehenen Kapitals nach den 13 ganzen Jahren mit Hülfe der Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n$$

berechnet und dann noch untersucht, zu welcher Summe dieser künftige Wert in dem Jahresbruchteil $\frac{136}{365}$ mit seinen einfachen Zinsen (zu $\frac{136}{365} \cdot 4\frac{2}{3}\,\%$ für diesen Jahresbruchteil angenommen) anwächst.

Siehe die Antwort der Frage 15 oder der Frage 16 der 2. Auflage.

$$\log x = 13 . (\log 157 - \log 150) + \log 17091 + \log 55702 - \log 54750$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcr}
\log 157 & = & 2{,}1958997 \\
-\log 150 & = & 2{,}1760913 \\
\hline
 & & 0{,}0198084 \\
 & & .\,13 \\
\hline
 & & 594252 \\
 & & 198084 \\
\hline
 & & 0{,}2575092 \\
+\log 17091 & = & 4{,}2327675 \\
+\log 55702 & = & 4{,}7458708 \\
\hline
 & & 9{,}2361475 \\
-\log 54750 & = & -4{,}7383841 \\
\hline
\log x & = & 4{,}4977634 \\
 & & 7587 \\
\hline
 & & 47 \\
 & & 41{,}4 \\
\hline
 & & 5{,}6 \\
 & & 5{,}5
\end{array}$$

mithin:

$$num\,\log x = 31460{,}34$$

Die ausgeliehene Summe ist also bis zum 7. März 1883 angewachsen zu 31460 Mark und 34 pf.

*). **Aufgabe 53.** Jemand hatte am 4. Februar 1891 eine Summe von 3517 Mark zu zahlen, zahlte aber schon am 30. Juni 1884. Wie gross war diese Zahlung bei $4\frac{4}{5}\,\%$ Zinseszinsberechnung?

Erkl. 126. Vom 30. Juni 1884 bis 1. Jan. 1885 verfliesst $\frac{1}{2}$ Jahr; vom 1. Jan. 1885 bis 1. Jan. 1891 verfliessen 6 Jahre und vom 1. Jan. 1891 bis 4. Febr. 1891 verfliessen 34 Tage.

Im ganzen wurde also $6\frac{1}{2}$ Jahr und 34 Tage oder $6 + \frac{1}{2} + \frac{34}{365} = 6\frac{107}{180}$ Jahre die am 4. Febr. 1891 zu zahlende Summe von 3517 Mark früher bezahlt.

Formel 18^a:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \left(1 + \frac{m_1}{m} \cdot 0{,}0p\right)$$

(siehe die Anmerkung bei Aufgabe 52.)

Auflösung. Wie in der Erkl. 31 angegeben ist, muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass die am 30. Juni 1884 früher gezahlte und gesuchte Summe x mit ihren Zinseszinsen zu $4\frac{4}{5}\,\%$ bis zum 4. Febr. 1891 zu der Höhe von 3517 Mark anwachsen wird.

In dieser Aufgabe ist somit das Anfangskapital, also $k = x$, nämlich gesucht; dann ist das Endkapital, also $K = 3517$, ferner ist $p = 4\frac{4}{5}$ oder $= 4{,}8$, also $1{,}0p = 1{,}048$ und $0{,}0p = 0{,}048$ (siehe Erkl. 9 oder Erkl. 27 der 2. Auflage) und schliesslich ist die Zeit, welche angibt, wieviel früher die Summe gezahlt wurde, also die Anzahl der Jahre nach der Erkl. 126 $= 6\frac{107}{180}$.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man hiernach und wenn in derselben n gleich der Anzahl 6 der ganzen Jahre und $\frac{m_1}{m}$ gleich dem Jahresbruchteil $\frac{107}{180}$ gesetzt wird, für x die Bestimmungsgleichung:

$$3517 = x \cdot 1{,}048^6\left(1 + \frac{107}{180} \cdot 0{,}048\right)$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3517 = x \cdot 1{,}048^6 \cdot \frac{180 + 5{,}136}{180}$$

$$x \cdot \frac{1{,}048^6 . 185{,}136}{180} = 3517 \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{3517 . 180}{1{,}048^6 . 185{,}136}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 3517 + \log 180 - (6 . \log 1{,}048 + \log 185{,}136)$$

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}048 = & 0{,}0203613 \\ & .\ 6 \\ \hline & 0{,}1221678 \\ + \log 185{,}136 = & 2{,}2674768 \\ & + 141 \\ \hline & 2{,}3896587 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \text{Nun ist:} & \log 3517 = & 3{,}5461724 \\ & + \log 180 = & 2{,}2552725 \\ \hline & & 5{,}8014449 \\ -(6 . \log 1{,}048 + \log 185{,}136) & = & -2{,}3896587 \\ \text{(siehe Hülfsrechnung)} & & \\ \hline & \log x = & 3{,}4117862 \\ & & 7712 \\ \hline & & 150 \\ & & 151{,}2 \end{array}$$

mithin:

$num \log x = 2580{,}99$

Die am 30. Juni 1884 zu zahlende Summe beträgt hiernach:

2581 Mark.

Aufgabe 54. Am 1. Juli 1884 wurden 1000 Mark auf Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ gegeben und sollten zurückgezahlt werden, wann sie auf 2222 Mark angewachsen sind. Wann kann dies geschehen?

Formel 1ª: $K = k . 1{,}0p^n$

Formel 18ª:

$$K = k . 1{,}0p^n\left(1 + \frac{m_1}{m} . 0{,}0p\right)$$

(siehe die Anmerk. bei Aufgabe 52.)

Auflösung. Zur Berechnung des gesuchten Datums, an welchem die ausgeliehene Summe zurückgezahlt werden soll, hat man zu beachten, dass die Anzahl n der Jahre gesucht ist und hierzu dient vorstehende Formel 1ª:

$$K = k . 1{,}0p^n$$

Setzt man in derselben:

$K = 2222$
$k = 1000$
$p = 4{,}5$, also $1{,}0p = 1{,}045$ und
$n = x$, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$2222 = 1000 . 1{,}045^x$$

und hieraus ergibt sich für x der Reihe nach:

$$1{,}045^x = \frac{2222}{1000}$$

$$1{,}045^x = 2{,}222$$

$$x \,.\, \log 1{,}045 = \log 2{,}222$$

$$x = \frac{\log 2{,}222}{\log 1{,}045} \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{0{,}3467441}{0{,}0191163}$$

und mittelst einfacher Division:

$$x = 18\frac{26507}{191163} \text{ Jahre.}$$

Die Anzahl x der Jahre ist hiernach gefunden, sie beträgt 18 ganze Jahre und ein Jahresbruchteil; um nun den Jahresbruchteil nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel zu erhalten, setze man nunmehr in vorstehender Formel 18^a:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n\left(1 + \frac{m_1}{m} \,.\, 0{,}0p\right)$$

$K = 2222$; $k = 1000$; $1{,}0p = 1{,}045$; $n = 18$, nämlich gleich der soeben berechneten Anzahl der ganzen Jahre; $0{,}0p = 0{,}045$ und den gesuchten Jahresbruchteil $\frac{m_1}{m} = y$. Hiernach erhält man für y die Bestimmungsgleichung:

$$2222 = 1000 \,.\, 1{,}045^{18}(1 + 0{,}045 \,.\, y)$$

Diese Gleichung nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1 + 0{,}045 \,.\, y = \frac{2222}{1000 \,.\, 1{,}045^{18}}$$

$$0{,}045 \,.\, y = \frac{2222}{1000 \,.\, 1{,}045^{18}} - 1 \quad \text{und}$$

$$y = \left(\frac{2{,}222}{1{,}045^{18}} - 1\right) : 0{,}045$$

Nach nebenstehender Hülfsrechn. 1). erhält man hieraus:

$$y = (1{,}00612 - 1) : 0{,}045 \quad \text{oder:}$$

$$y = 0{,}00612 : 0{,}045$$

und hieraus ergibt sich durch einfache Division für den Jahresbruchteil y:

$$y = 0{,}136$$

oder diesen Jahresbruchteil in Tage verwandelt, also mit 365 multipliziert $= 59{,}64$, oder abgerundet $= 60$ Tage.

Das ausgeliehene Kapital ist somit nach 18 Jahren und 60 Tagen zu der

Hülfsrechnungen.

1). $\log \frac{2{,}222}{1{,}045^{18}} = \log 2{,}222 - 18 \,.\, \log 1{,}045$

Nun ist: $\log 2{,}222 = 0{,}3467441$

$-18 \,.\, \log 1{,}045 = -0{,}3440934$ (siehe Hülfsrechn. 2)

$\phantom{-18 \,.\, \log 1{,}045 =}\ 0{,}0026507$

6411

96

86,4

mithin:

$$\frac{2{,}222}{1{,}045^{18}} = 1{,}00612$$

2). . . $\log 1{,}045 = 0{,}0191163$

. 18

1529304

191163

$18 \,.\, \log 1{,}045 = 0{,}3440934$

Erkl. 127. Zählt man vom 1. Juli 1884 60 Tage weiter, so erhält man den 29. August, zählt man von da ab 18 Jahre weiter, so erhält man als Datum den 29. August 1902.

angegebenen Summe angewachsen, zur Berechnung des Datums, an welchem dies nach dem 1. Juli 1884 stattfindet, beachte man die Erkl. 127, hiernach ergibt sich als Datum der 29. August 1902.

Aufgabe 55. Ein am 18. August 1877 ausgeliehenes Kapital von 25000 Mark wurde am 3. Januar 1884 mit 34121 Mark zurückbezahlt. Wieviel % rechnete man?

Formel 18ᵃ:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \left(1 + \frac{m_1}{m} \cdot 0{,}0p\right)$$

(siehe die Anmerk. bei Aufgabe 52.)

Auflösung. Da in dieser Aufgabe die Anzahl der Jahre eine gemischte (gebrochene) ist, so erhält man, wenn der Zinsfuss p nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel berechnet werden soll, unter Benutzung der vorstehenden Formel, wenn man in derselben:

für das Endkapital $K = 34121$,
„ „ Anfangskapital $k = 25000$,
„ die Anzahl n der ganzen Jahre: $n = 6$
„ den Jahresbruchteil $\frac{m_1}{m} = \frac{138}{365}$ (siehe Erkl. 128)

und für den gesuchten Zinsfuss (Prozentsatz) $p = x$ setzt, die Bestimmungsgleichung:

$$34121 = 25000 \cdot 1{,}0x^6 \left(1 + \frac{138}{365} \cdot 0{,}0x\right)$$

Um hieraus die Grösse x berechnen zu können, muss analog wie in der Aufgabe 51, die Gleichung nach $1{,}0x$ aufgelöst werden und deshalb die darin vorkommende Grösse $0{,}0x$ durch $1{,}0x - 1$ ersetzt werden; man erhält:

$$34121 = 25000 \cdot 1{,}0x^6 \left(1 + \frac{138}{365}(1{,}0x - 1)\right)$$

Diese Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{34121}{25000} = 1{,}0x^6 \left(1 + \frac{138}{365} \cdot 1{,}0x - \frac{138}{365}\right)$$

$$\frac{34121}{25000} = 1{,}0x^6 \left(\frac{227}{365} + \frac{138}{365} \cdot 1{,}0x\right)$$

$$\frac{34121}{25000} = \frac{227}{365} \cdot 1{,}0x^6 + \frac{138}{365} \cdot 1{,}0x^7$$

$$\frac{138}{365} 1{,}0x^7 + \frac{227}{365} \cdot 1{,}0x^6 = \frac{34121}{25000} \quad \text{oder:}$$

$$1).\quad 1{,}0x^7 + \frac{227}{138} \cdot 1{,}0x^6 = \frac{34121 \cdot 365}{25000 \cdot 138}$$

Man hätte hier also eine höhere Gleichung vom 7. Grade zu lösen, was, wie in der Aufgabe 51 angedeutet ist, geschehen könnte.

Erkl. 128. Vom 18. August 1877 bis zum 3. Januar 1884 verstreichen $6\frac{138}{365}$ Jahre; denn:

vom 18. Aug. 1877 bis 1. Sept. desselben Jahres verfliessen 12 Tage
„ 1. Sept. bis 1. Okt. verfliessen 31 „
„ 1. Okt. „ 1. Nov. „ 31 „
„ 1. Nov. „ 1. Dez. „ 30 „
„ 1. Dez. „ 1. Jan. 1878 „ 31 „

dann verfliessen vom 1. Jan. 1878 bis 1. Jan. 1884 im ganzen 6 Jahre und schliesslich verfliessen vom 1. Jan. 1884 bis 3. Jan. desselben Jahres 3 Tage.

Im ganzen sind also vom 18. August 1877 bis 3. Januar 1884
6 Jahre 138 Tage oder
$6\frac{138}{365}$ Jahre verflossen.

Erkl. 129. Für den Jahresbruchteil $\frac{138}{365}$ kann man auch den nicht viel von ihm verschiedenen Bruch: $\frac{135}{360}$ oder $\frac{3 \cdot 45}{8 \cdot 45}$, bezw. den Näherungswert $\frac{3}{8}$ setzen; da bei der späteren logarithmischen Rechnung es ohne Unterschied bleibt, ob man den Bruch $\frac{138}{365}$ oder den Bruch $\frac{135}{360}$, bezw. den Bruch $\frac{3}{8}$ in Rechnung zieht.

Um den Wert für $x = p$ zu bestimmen, der dem sich aus der Gleichung 1). ergebenden Wert für x sehr nahe kommt und streng mathematisch genau der eigentlich richtige ist, berechne man p aus der allgemeinen Formel 1[a]:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

indem man in derselben:

$K = 34121$
$k = 25000$
$p = y$ und
$n = 6\frac{138}{365}$ oder auch gleich dem Näherungswert: $6\frac{3}{8}$ setzt (siehe Erkl. 129).

Hiernach erhält man:

$$34121 = 25000 \,.\, 1{,}0y^{6\frac{3}{8}}$$

Diese Gleichung nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}0y^{6\frac{3}{8}} = \frac{34121}{25000}$$

$$1{,}0y^{\frac{51}{8}} = \frac{34121}{25000}$$

$$1{,}0y^{51} = \left(\frac{34121}{25000}\right)^8$$

$$1{,}0y = \sqrt[51]{\left(\frac{34121}{25000}\right)^8}$$ und

2). . $1{,}0y = \left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}}$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn.:

$$1{,}0y = 1{,}05$$

Berücksichtigt man jetzt, dass $1{,}0y = \frac{100+y}{100}$ ist, so erhält man:

$$\frac{100+y}{100} = 1{,}05$$

und hieraus ergibt sich:

$$100 + y = 1{,}05 \,.\, 100 = 105$$
$$y = 105 - 100 \text{ oder:}$$
$$y = 5$$

Nach der mathematisch richtigen Formel erhält man also für den gesuchten Zinsfuss (Prozentsatz) y:

$$y = 5\,\%$$

welcher Wert von dem sich aus der höheren Gleichung 2). ergebenden Wert für x nur um ein sehr geringes, fast um nichts, unterscheiden wird.

Hülfsrechnungen.

1). $log\left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}} = \frac{8}{51} \cdot \left(log 34121 - log 25000\right)$

Nun ist: $log\, 34121 = 4{,}5330218$
$-log\, 25000 = -4{,}3979400$
$0{,}1350818$
$.\,8$
$1{,}0806544$
$.\,\frac{1}{51}$

$log\left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}} = 0{,}0211893$

mithin:

$$\left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}} = 1{,}0500$$

2). $log\, 1{,}05^7 = 7 \,.\, log\, 1{,}05$

Nun ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
$.\,7$
$log\, 1{,}05^7 = 0{,}1483251$
3250

mithin:
$1{,}05^7 = 1{,}4071$

3). $log\, \frac{227}{138} \cdot 1{,}05^6 = 6 \,.\, log 1{,}05 + log 227 - log 138$

Nun ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
$.\,6$
$0{,}1271358$
$+ log\, 227 = 2{,}3560259$
$2{,}4831617$
$- log\, 138 = 2{,}1398791$
$0{,}3432826$
2707
119
118,2

mithin:

$$\frac{227}{138} \cdot 1{,}05^6 = 2{,}20435$$

Hülfsrechnungen.

4). $log \frac{34121 . 365}{25000 . 138} = log\,34121 + log\,365 - (log\,25000 + log\,138)$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist:}\quad log\,34121 &= 4{,}5330218 \\ +\,log\,365 &= 2{,}5622929 \\ &\overline{\;7{,}0953147} \\ -\,(log\,25000 + log\,135) &= -6{,}5378191 \end{aligned}$$

(siehe Hülfsrechn. 5)

$$0{,}5574956$$
$$\underline{4952}$$
$$4$$

mithin:

$$\frac{34121 . 365}{25000 . 138} = 3{,}6099$$

5). $log\,25000 = 4{,}3979400$
$+\,log\,138 = 2{,}1398791$
$\overline{\;6{,}5378191}$

Setzt man zur Untersuchung, ob der sich aus Gleich. 1). für x ergebende Wert grösser oder kleiner als der soeben gefundene Wert für y ist, den für y gefundenen Wert an Stelle der Grösse x in der Gleich. 1). ein, so würde man, wenn die Werte für x und y dieselben wären, enthalten:

$$1{,}05^7 + \frac{227}{138} \cdot 1{,}05^6 = \frac{34121 . 365}{25000 . 138}$$

Berechnet man beide Seiten dieser (vermeintlichen) Gleichung, so findet man nach Hülfsrechnungen 2). bis 5)., dass die linke Seite = 3,61185 und die rechte Seite = 3,6099 beträgt, dass also diese Gleichung eine Ungleichung ist, in welcher die linke Seite um ca. $\frac{1}{1000}$ grösser als die rechte Seite ist. Der aus der Gleichung 2). für den Zinsfuss mathematisch richtig berechnete Wert: 5 % ist somit um ein geringes grösser, als derjenige, welcher sich aus der höheren Gleichung 1). durch probieren ergeben würde.

Der sich ergebende Unterschied ist ein so geringer, dass man bei dieser und ähnlichen Aufgaben, wenn also der Zinsfuss p gesucht ist, stets die mathematisch richtige Formel benutzen kann, indem die Rechnung mittelst der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel auf eine höhere Gleichung führt.

Aufgabe 56. In einer Stadt stieg innerhalb kurzer Zeit die Bevölkerung von 8000 auf 9752 Seelen, indem jährlich auf 25 Seelen eine Geburt und auf 50 Seelen nur 1 Todesfall kamen. In welcher Zeit geschah diese Vermehrung?

Erkl. 130. Zur Bestimmung des Prozentsatzes p, nach welchem die jährliche Vermehrung stattfindet, mache man folgende Betrachtung:

Auf 25 Seelen kommt 1 Geburt, mithin kommt auf 1 Seele $\frac{1}{25}$ Geburt, also kommen auf 100 Seelen $\frac{100}{25}$ oder = 4 Geburten.

Ferner kommt auf 50 Seelen 1 Todesfall, also auf 1 Seele $\frac{1}{50}$ Todesfall, woraus sich ergibt, dass auf 100 Seelen $\frac{100}{50}$ oder 2 Todesfälle kommen.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich schliesslich, dass die jährliche Vermehrung von 100 Seelen = 4 — 2 beträgt, dass also $p = 4 - 2$ oder = 2 % ist.

Formel 1ª: $K = k . 1{,}0p^n$

Auflösung. Zur Berechnung der in dieser Aufgabe gesuchten Zeit dient vorstehende Formel 1ª:

$$K = k . 1{,}0p^n$$

Setzt man in derselben:

$$\begin{aligned} K &= 9752 \\ k &= 8000 \\ p &= 2 \quad \text{(siehe Erkl. 130)} \\ \text{und}\quad n &= x \end{aligned}$$

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$9752 = 8000 . 1{,}02^x$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}02^x = \frac{9752}{8000}$$

$$x . log\,1{,}02 = log\,9752 - log\,8000$$

$$x = \frac{log\,9752 - log\,8000}{log\,1{,}02}$$

$$x = \frac{3{,}9890937 - 3{,}9030900}{0{,}0086002}$$

$x = \frac{0{,}0860037}{0{,}0086002}$ und hieraus ergibt sich durch einfache Division für die gesuchte Zeit x:

$$x = 10 \text{ Jahre.}$$

*). **Aufgabe 57.** Wieviel Zinseszinsen erhält man von 8746 Mark zu 5 % in 16 Jahren?

Erkl. 131. Setzt man in der Formel 1ª:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

$$k = 8746, \quad p = 5 \text{ und } n = 16$$

so erhält man für den künftigen Wert K, d. i. das ursprüngliche Kapital samt Zinsen und Zinseszinsen:

$$K = 8746 \,.\, 1{,}05^{16}$$

Erkl. 132. Die einfachen Zinsen, welche das Kapital 8746 Mark zu 5 % in 16 Jahren trägt, findet man wie folgt:

100 ℳ bringen bei 5 % in 1 Jahr 5 ℳ Zinsen,
100 „ „ „ „ „ „ 2 „ = 2.5 ℳ „
100 „ „ „ „ „ „ 3 „ = 3.5 „ „
u. s. f.
100 „ bringen bei „ „ „ 16 „ = 16.5 „ „
1 „ bringt „ „ „ „ 16 „ = $\frac{16.5}{100}$ „ „ und
8746 „ bringen „ „ „ „ 16 „ = $\frac{16.5.8746}{100}$ ℳ einfache Zinsen.

Hülfsrechnung.

1). $\log 1{,}05^{16} = 16 \,.\, \log 1{,}05$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 16
1271358
211893
$\log 1{,}05^{16} = 0{,}3390288$
0139
149
138,6
10,4
9,9

mithin ist:

$num \log 1{,}08^{16} = 2{,}182875$

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Die gesuchten Zinseszinsen x erhält man, wenn man von dem Endkapital K das ursprüngliche Kapital k und auch noch die einfachen Zinsen y, welche das Kapital k in der betreffenden Zeit bringt, abzieht.

Zur Berechnung der gesuchten Zinseszinsen x besteht somit die Relation:

1). . . $x = K - k - y$

Substituiert man in diese Gleichung für K den sich mittelst vorstehender Formel für K ergebenden Wert:

$$K = 8746 \,.\, 1{,}05^{16} \text{ (siehe Erkl. 131)}$$

für k den Wert:

$k = 8746$ und für die einfachen Zinsen y, welche das ausgeliehene Kapital 8746 in den 16 Jahren zu 5 % bringt, nämlich:

$$y = \frac{16 \,.\, 5 \,.\, 8746}{100} \text{ (siehe Erkl. 132)}$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

2). $x = 8746 . 1{,}05^{16} - 8746 - \frac{16 \,.\, 5 \,.\, 8746}{100}$

Hieraus kann man x wie folgt berechnen:

$$x = 8746 \cdot \left(1{,}05^{16} - 1 - \frac{16 \,.\, 5}{100}\right)$$

$$x = 8746 \cdot \left(2{,}182875 - 1 - \frac{4}{5}\right)$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

$$x = 8746 \cdot \left(2{,}182875 - \frac{9}{5}\right)$$

$$x = 8746 \,.\, (2{,}182875 - 1{,}8)$$

$$x = 8746 \,.\, 0{,}382875$$

und hieraus findet man durch einfache Multiplikation für die gesuchten Zinseszinsen x:

$x = 3348{,}62$ Mark oder:
3348 Mark 62 pf.

*). **Aufgabe 58.** Ein Kapital, das 10 Jahre zu 5 % ausstand, dann 14000 Mark verlor und die folgenden 30 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen war, ist mit seinen Zinsen und Zinseszinsen auf 140 000 Mark angewachsen. Wie gross war jenes Kapital?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Bezeichnet man das gesuchte Kapital mit x, so ist dasselbe

bei 5 % Zinseszinsen bis Ende des 10. Jahres, nach vorstehender Formel 1^a, wenn man in derselben $k = x$, $p = 5$, bezw. $1{,}0p = 1{,}05$ und $n = 10$ setzt, angewachsen zu:

$$x \,.\, 1{,}05^{10}$$

Von dieser Summe gehen nunmehr 14000 Mark verloren, es bleiben somit:

$$x \,.\, 1{,}05^{10} - 14000 \text{ Mark},$$

welche zu $4\frac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen 30 weitere Jahre stehen und bis zu Ende des 30. Jahres zu 140000 Mark anwachsen.

Mit Benutzung der vorstehenden Formel 1^a erhält man hiernach, wenn man in derselben:

$$K = 140000$$
$$k = x \,.\, 1{,}05^{10} - 14000$$
$$p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5, \text{ bezw. } 1{,}0p = 1{,}045$$
und $n = 30$ setzt,

für x die Bestimmungsgleichung:

$$140000 = (x \,.\, 1{,}05^{10} - 14000) \,.\, 1{,}045^{30}$$

Hülfsrechnung.

1). $log \frac{140000}{1{,}045^{30}} = log\, 140000 - 30 \,.\, log\, 1{,}045$

Nun ist: $log\, 140000 = 5{,}1461280$

$-30 \,.\, log 1{,}045 = -30 \,.\, 0{,}0191163 = -0{,}5734890$

4,5726390
6277
113
104,4
8,6
8,1

mithin:

$$\frac{140000}{1{,}045^{30}} = 37379{,}97$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x \,.\, 1{,}05^{10} - 14000 = \frac{140000}{1{,}045^{30}}$$

$$x \,.\, 1{,}05^{10} = \frac{140000}{1{,}045^{30}} + 14000 \text{ oder:}$$

$$x = \left(\frac{140000}{1{,}045^{30}} + 14000\right) : 1{,}05^{10}$$

Nach der Hülfsrechn. 1). erhält man hieraus:

$$x = (37379{,}97 + 14000) : 1{,}05^{10}$$

$$x = \frac{51379{,}97}{1{,}05^{10}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, x = 51379{,}97 - 10 \,.\, log\, 1{,}05$$

Nun ist: $log\, 51379{,}97 = 4{,}7107856$
+ 76,5
5,9

4,7107938

$-10 \,.\, log 1{,}05 = -10 \,.\, 0{,}0211893 = -0{,}2118930$

$log\, x = 4{,}4989008$
8892
116
110,4
5,6
5,5

mithin:

$$num\, log\, x = 31542{,}84$$

Das ursprüngliche Kapital x war also $= 31542$ Mark 84 pf.

*). **Aufgabe 59.** Der Abtrieb eines Waldes kann in 60jährigem Alter bei einem Hiebe von 220 cbm à 5 Mark, oder in 80jährigem Alter bei einem Hiebe von 260 cbm à 6 Mark geschehen. Welches ist das finanziell vorteilhaftere Abtriebsalter, wenn bei Verzinsung des Kapitals ein 4 %iger Zinsfuss in Anschlag gebracht wird?

Hülfsrechnungen.

1). $log \frac{1100}{1{,}04^{60}} = log\,1100 - 60 \,.\, log\,1{,}04$

Nun ist: $log\,1100 = 3{,}0413927$
$-60 \,.\, log\,1{,}04 = -60 \,.\, 0{,}0170333 = -1{,}0219980$
$2{,}0193947$
mithin: 4071
$\frac{1100}{1{,}04^{60}} = 104{,}57$

2). $log \frac{2160}{1{,}04^{80}} = log\,2160 - 80 \,.\, log\,1{,}04$

Nun ist: $log\,2160 = 3{,}3344538$
$-80 \,.\, log\,1{,}04 = -80 \,.\, 0{,}0170333 = -1{,}3626640$
$1{,}9717898$
mithin: 7859
39
37,6
$\frac{2160}{1{,}04^{80}} = 93{,}7108$

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Zur Untersuchung, welches das vorteilhaftere Abtriebsalter des Waldes ist, muss man zunächst die baren (jetzigen) Werte der Erträge, welche der Wald bei einem 60-, bezw. 80jährigen Abtriebsalter liefert, berechnen. Dies geschieht wie folgt:

A). Bei einem 60jährigen Abtriebsalter können der Aufgabe gemäss jährlich 220 cbm geschlagen werden, welche jedes Jahr einen Wert von 220 . 5 = 1100 Mark repräsentieren. Den baren (jetzigen) Wert x des ersten dieser jährlichen Erträge von je 1100 Mark, also desjenigen, welcher am Ende des 60. Jahres erzielt wird, findet man nach der Erkl. 11, bezw. nach der Erkl. 29 in der 2. Auflage, mittelst vorstehender Formel 1ª, wenn man in derselben:

$K = 1100$
$k = x$
$p = 4$ und
$n = 60$ setzt,

aus der Gleichung:

$$1100 = x \,.\, 1{,}04^{60}$$

indem man hieraus:

a). . . . $x = \frac{1100}{1{,}04^{60}}$

oder nach der Hülfsrechnung 1).:

1). . . . $x = 104{,}57$ Mark erhält.

B). Bei einem 80jährigen Abtriebsalter können der Aufgabe gemäss jährlich 260 cbm geschlagen werden, welche jedes Jahr einen Wert von 260 . 6 = 2160 Mark repräsentieren. Den baren (jetzigen) Wert y der ersten dieser jährlichen Erträge von je 2160 Mark, also desjenigen, welcher am Ende des 80. Jahres erzielt wird, findet man nach der Erkl. 11, bezw. nach der Erkl. 29 in der 2. Auflage, mittelst vorstehender Formel 1ª, wenn man in derselben:

$K = 2160$
$k = y$
$p = 4$ und
$n = 80$ setzt,

aus der Gleichung:

$$2160 = y \,.\, 1{,}04^{80}$$

indem man hieraus:

b). . . . $y = \frac{2160}{1{,}04^{80}}$

oder nach der Hülfsrechnung 2).:

2). . . . $x = 93{,}71$ Mark erhält.

Aus den Gleichungen a). und b)., bezw. aus den unter 1). und 2). berechneten Werten ergibt sich, dass der bare Wert x des ersten Ertrags bei 60jährigem Abtriebsalter grösser ist, als der bare Wert y des ersten Ertrags bei 80jährigem Abtriebsalter.

Somit ist unter der gegebenen Bedingung das 60jährige Abtriebsalter das finanziell vorteilhaftere.

Aufgabe 60. Jemand leiht ein Kapital auf Zinseszinsen zu p % und verleiht dasselbe zu p_1 %. Nach n Jahren zahlt er das Kapital zurück und gewinnt G Mark. Wieviel betrug dasselbe?

Formel 1[a]: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Bezeichnet man das zu p % geliehene und zu p_1 % wieder verliehene und gesuchte Kapital mit x; bezeichnet man ferner den künftigen Wert des zu p % geliehenen Kapitals x nach n Jahren mit K und den künftigen Wert des zu p_1 % verliehenen Kapitals x nach n Jahren mit K_1, so hat man für den Gewinn G die Relation:

1). . . . $K_1 - K = G$

oder mit Benutzung der vorstehenden Formel 1[a] für x die Bestimmungsgleichung:

2). . . $x \,.\, 1{,}0p_1^n - x \,.\, 1{,}0p^n = G$

und hieraus erhält man für x:

$$x \,.\, (1{,}0p_1^n - 1{,}0p^n) = G \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{G}{1{,}0p_1^n - 1{,}0p^n}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 61. Wie lange muss ein Kapital k zu dem Zinsfuss p ausstehen, um ebensoviel zu werden als ein Kapital k_1 zu dem Zinsfuss p_1 nach n_1 Jahren?

Formel 1[a]: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Zeit x, bezw. der gesuchten Anzahl x der Jahre beachte man, dass der künftige Wert des während den x Jahren zu p % auf Zinseszinsen stehenden Kapitals k gleich dem künftigen Wert

des während n_1 Jahren zu p_1 % auf Zinseszinsen stehenden Kapitals k_1 sein soll. Mittelst doppelter Benutzung der vorstehenden Formel 1[a] erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $k \cdot 1{,}0p^x = k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}0p^x = \frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}$$

$$x \cdot \log 1{,}0p = \log k_1 + n_1 \cdot \log 1{,}0p_1 - \log k$$

oder:

$$x = \frac{\log k_1 + n_1 \cdot \log 1{,}0p_1 - \log k}{\log 1{,}0p}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 62. Wie gross muss der Zinsfuss p sein, wenn ein Kapital k nach n Jahren ebensoviel wert sein soll, als ein Kapital k_1 nach n_1 Jahren zu p_1 %?

Formel 1[a]: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Zur Berechnung des gesuchten Zinsfusses $p = x$ beachte man, dass der künftige Wert des während den n Jahren zu x % auf Zinseszinsen stehenden Kapitals k gleich dem künftigen Wert des während n_1 Jahren zu p_1 % auf Zinseszinsen stehenden Kapitals k_1 sein soll.

Mittelst doppelter Benutzung der vorstehenden Formel 1[a] erhält man hiernach für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $k \cdot 1{,}0x^n = k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}0x^n = \frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}$$

$$1{,}0x = \sqrt[n]{\frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}}$$

$$\frac{100 + x}{100} = \sqrt[n]{\frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}}$$

$$x = 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}} - 100$$

oder:

1). $x = 100\left(\sqrt[n]{\frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}} - 1\right)$

(siehe Erkl. 133)

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Erkl. 133. Den in nebenstehender Gleichung 1). vorkommenden Ausdruck:

$$\sqrt[n]{\frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}}$$

berechnet man logarithmisch wie folgt:

$$\log \sqrt[n]{\frac{k_1 \cdot 1{,}0p_1^{n_1}}{k}} = \frac{1}{n}\left(\log k_1 + n_1 \cdot \log 1{,}0p_1 - \log k\right)$$

Aufgabe 63. Zwei Kapitalien, die sich wie 2:3 verhalten, wachsen in 22 Jahren zu gleichen Summen an. Zu wieviel % stehen sie, wenn die Prozente sich wie 3:2 verhalten?

Formel 1ª: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Prozentsätze x und y beachte man, da deren Verhältnis $= 3:2$ gegeben ist, dass wenn man den gesuchten Prozentsatz x des ersten Kapitals mit $3z$ bezeichnet, der gesuchte Prozentsatz y des zweiten Kapitals $= 2z$ sein muss, somit hat man zunächst die Relationen:

1). . . . $x = 3z$ und

2). . . . $y = 2z$

Da ferner die auf Zinseszinsen ausstehenden, nicht gegebenen und allgemein durch k und k_1 bezeichneten Anfangskapitalien sich wie 2 : 3 verhalten sollen, so beachte man, dass wenn das erste dieser Kapitalien mit $2w$ bezeichnet wird, das zweite $= 3w$ sein muss, somit hat man die weiteren Relationen:

3). . . . $k = 2w$ und

4). . . . $k_1 = 3w$

Zur Aufstellung einer Bestimmungsgleichung beachte man nunmehr, dass der Aufgabe gemäss der künftige Wert des auf Zinseszinsen zu x % ($= 3z$ %, siehe Gleichung 1).) 22 Jahre lang ausstehenden Kapitals k ($= 2w$, siehe Gleich. 3).) gleich dem künftigen Werte des auf Zinseszinsen zu y % ($= 2z$ %, siehe Gleich. 2).) 22 Jahre lang ausstehenden Kapitals k_1 ($= 3w$, siehe Gleich. 4).) sein soll.

Mittelst doppelter Benutzung der vorstehenden Formel 1ª:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n$$

und in Rücksicht, dass $1{,}0p = \frac{100 + p}{100}$ ist, erhält man hiernach für z die Bestimmungsgleichung:

5). $$2w \cdot \left(\frac{100 + 3z}{100}\right)^{22} = 3w \cdot \left(\frac{100 + 2z}{100}\right)^{22}$$

Diese Gleichung durch w dividiert und nach z aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2\left(\frac{100 + 3z}{100}\right)^{22} = 3\left(\frac{100 + 2z}{100}\right)^{22}$$

$$\sqrt[22]{2} \cdot \frac{100 + 3z}{100} = \sqrt[22]{3} \cdot \frac{100 + 2z}{100}$$

$$\sqrt[22]{2}\,(100+3z) = \sqrt[22]{3}\,(100+2z)$$

$$100+3z = \frac{\sqrt[22]{3}}{\sqrt[22]{2}}\,(100+2z)$$

$$100+3z = \sqrt[22]{\frac{3}{2}}\,(100+2z)$$

$$100+3z = \sqrt[22]{1{,}5}\,(100+2z)$$

$$100+3z = 100\sqrt[22]{1{,}5} + 2\,.\sqrt[22]{1{,}5}\,.\,z$$

$$3z - 2\sqrt[22]{1{,}5}\,.\,z = 100\sqrt[22]{1{,}5} - 100$$

$$z\left(3-2\sqrt[22]{1{,}5}\right) = 100\left(\sqrt[22]{1{,}5}-1\right) \quad \text{oder:}$$

Hülfsrechnung.

1). $\log\sqrt[22]{1{,}5} = \frac{1}{22}\cdot\log 1{,}5$

Nun ist: $\log 1{,}5 = 0{,}1760913$
$\cdot\frac{1}{22}$

$\log\sqrt[22]{1{,}5} = 0{,}0080042$
0037
5

mithin:
$num\log\sqrt[22]{1{,}5} = 1{,}01860$

6). $$z = \frac{100\left(\sqrt[22]{1{,}5}-1\right)}{3-2\cdot\sqrt[22]{1{,}5}}$$

Nach der Hülfsrechn. 1). erhält man hieraus:

$$z = \frac{100\,(1{,}0186-1)}{3-2\,.\,1{,}0186}$$

$$z = \frac{100\,.\,0{,}0186}{3-2{,}0372} = \frac{1{,}86}{0{,}9628}$$

und durch einfache Division:

7). $z = 1{,}932$

Substituiert man diesen Wert für z in die Gleichungen 1). und 2)., so erhält man für die gesuchten Prozentsätze x und y:

$x = 3\,.\,1.932$ oder:

A). $x = 5{,}796\,\%$ und

$y = 2\,.\,1{,}932$ oder:

B). $y = 3{,}864\,\%$

Aufgabe 64. A hat 100000 Mark auf Zinsen und nimmt jährlich 7000 Mark weg. B hat 10000 Mark auf Zinsen und legt jährlich ausser den Zinsen 700 Mark zu. Nach wieviel Jahren haben beide gleichviel, wenn $4\frac{5}{8}\,\%$ gerechnet werden?

Formel 6: $K = k\,.\,1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 4: $K = k\,.\,1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Anzahl x der Jahren beachte man, dass der künftige Wert der 100000 Mark des A, welche während jenen x Jahren zu $4\frac{5}{8}\,\%$ auf Zinseszinsen stehen und

am Ende eines jeden dieser x Jahre um die Summe von 7000 Mark vermindert werden, gleich sein soll dem künftigen Wert der 10 000 Mark des B, welcher ebenfalls während jenen x Jahren zu $4^5/_8$ % auf Zinseszinsen stehen und am Ende eines jeden dieser x Jahre um die Summe von 700 Mark vermehrt werden.

Mit Benutzung der vorstehenden Formeln 6 und 4 erhält man, wenn man in Formel 6:

$$k = 100000$$
$$p = 4\tfrac{5}{8} = 4{,}625, \text{ bezw. } 1{,}0p = 1{,}04625 \text{ und } 0{,}0p = 0{,}04625$$
$$n = x$$
$$r = 7000$$

und in Formel 4:

$$k = 10000$$
$$p = 4\tfrac{5}{8} = 4{,}625, \text{ bezw. } 1{,}0p = 1{,}04625 \text{ und } 0{,}0p = 0{,}04625$$
$$n = x \text{ und}$$
$$r = 7000 \text{ setzt,}$$

für x die Bestimmungsgleichung:

$$100000 \,.\, 1{,}04625^x - \frac{7000\,(1{,}04625^x - 1)}{0{,}04625} = 10000 \,.\, 1{,}04625^x + \frac{700\,(1{,}04625^x - 1)}{0{,}04625}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1000 \,.\, 1{,}04625^x - \frac{70\,(1{,}04625^x - 1)}{0{,}04625} = 100 \,.\, 1{,}04625^x + \frac{7\,(1{,}04625^x - 1)}{0{,}04625}$$

$$1000 \,.\, 0{,}04625 \,.\, 1{,}04625^x - 70\,(1{,}04625^x - 1) = 100 \,.\, 0{,}04625 \,.\, 1{,}04625^x + 7\,(1{,}04625^x - 1)$$

$$46{,}25 \,.\, 1{,}04625^x - 70 \,.\, 1{,}04625^x + 70 = 4{,}625 \,.\, 1{,}04625^x + 7 \,.\, 1{,}04625^x - 7$$

$$1{,}04625^x . (46{,}25 - 70 - 4{,}625 - 7) = -7 - 70$$

$$1{,}04625^x \cdot -35{,}375 = -77$$

$$1{,}04625^x = \frac{-77}{-35{,}375} = \frac{77}{35{,}375}$$

$$x \,.\, \log 1{,}04625 = \log 77 - \log 35{,}375$$

$$x = \frac{\log 77 - \log 35{,}375}{\log 1{,}04625}$$

$$x = \frac{1{,}8864907 - 1{,}5486964}{0{,}0196355}$$

$$x = \frac{0{,}3377943}{0{,}0196355}$$

Hülfsrechnung.

$$\log 1{,}04625 = 0{,}0196147$$
$$\underline{\phantom{0{,}0196}208}$$
$$0{,}0196355$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Anzahl x der Jahre:

$$x = 17{,}203 \text{ Jahre,}$$

d. h. im Laufe des 18. Jahres würden A und B gleichviel haben.

*). **Aufgabe 65.** Eine bestimmte Summe soll zu p (= $4\frac{1}{2}$) % mit Zinseszinsen n (= 20) Jahre ausgeliehen werden, um durch dieselbe in der gegebenen Zeit ein Kapital von einem zum Voraus angegebenen Betrag anzusammeln. Es kann aber nur ein Zinsfuss von p_1 (= $3\frac{1}{2}$) % erzielt werden. Um wieviel % muss unter diesen Umständen die ursprünglich bestimmte Summe vermehrt werden, damit bei dem herabgesetzten Zinsfuss der zum Voraus angegebene Betrag in der Zeit n (= 20) Jahre sich dennoch ansammeln kann?

Erkl. 134. Soll die bestimmte Summe k um x % vermehrt werden, so erhält man:

$$k + \frac{x}{100} \cdot k$$

denn bei x % Vermehrung des Kapitals k kommen auf 100 Mark x Mark, also kommt auf 1 Mark $\frac{x}{100}$ Mark und hiernach kommen auf k Mark $\frac{x}{100} \cdot k$ Mark Vermehrung. Die um x % vermehrte Summe k ist also:

$$k + \frac{x}{100} \cdot k$$

Hülfsrechnung.

$$log\left(\frac{1,045}{1,035}\right)^{20} = 20 . (log\,1,045 - log\,1,035)$$

$$\begin{array}{rl} \text{Nun ist: } log\,1,045 = & 0,0191163 \\ -\,log\,1,035 = & -0,0149403 \\ \hline & 0,0041760 \\ & .\,20 \\ \hline log\left(\frac{1,045}{1,035}\right)^{20} = & 0,0835200 \\ & 5026 \\ \hline & 174 \\ & 179,5 \end{array}$$

mithin:

$$\left(\frac{1,045}{1,035}\right)^{20} = 1,21205$$

Formel 1ª: $K = k . 1,0p^n$

Auflösung. Wird die bestimmte Summe, welche n Jahre lang zu p % ausgeliehen wird, damit sie mit ihren Zinsen und Zinseszinsen zu einem im Voraus gegebenen Betrag K anwächst, mit k bezeichnet, so besteht zwischen diesen Grössen, nach vorstehender Formel 1ª, die Relation:

1). . . . $K = k . 1,0p^n$

Bezeichnet man ferner den gesuchten Prozentsatz, um welchen jene bestimmte Summe k vermehrt werden muss, damit sie zu dem niedrigeren Zinsfuss p_1 ausgeliehen, dennoch in derselben Anzahl n von Jahren zu jenem im Voraus angegebenen Betrag K anwachsen kann, mit x, so hat man nach der Erkl. 134 und mittelst Benutzung vorstehender Formel 1ª, die weitere Relation:

2). . $K = \left(k + \frac{x}{100} . k\right) \cdot 1,0p_1^n$

Aus den Gleichungen 1). u. 2). erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

3). . $\left(k + \frac{x}{100} \cdot k\right) . 1,0p_1^n = k . 1,0p^n$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, erhält man der Reihe nach:

$$k + \frac{x}{100} . k = k \cdot \frac{1,0p^n}{1,0p_1^n}$$

$$1 + \frac{x}{100} = \left(\frac{1,0p}{1,0p_1}\right)^n$$

$$\frac{x}{100} = \left(\frac{1,0p}{1,0p_1}\right)^n - 1 \quad \text{oder:}$$

A). . $x = 100\left[\left(\frac{1,0p}{1,0p_1}\right)^n - 1\right]$ %

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = 100\left[\left(\frac{1,045}{1,035}\right)^{20} - 1\right]$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn.:

$$x = 100\,(1,21205 - 1)$$
$$x = 100 . 0,21205 \quad \text{und endlich:}$$

B). . $x = 21,205$ %

*). **Aufgabe 66.** Auf welche Summe wächst eine am Anfang eines jeden Jahres bei einer Kasse gemachte Einlage von $r = 300$ Mark bei $p = 4\frac{1}{2}\,\%$ Zinseszinsen bis nach dem Anfang des $n = 8$. Jahres an, wenn für Verwaltungskosten am Ende eines jeden Jahres $p_1 = 1\frac{1}{4}\,\%$ des Bestandes abgezogen werden?

Formel 5: $K = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe stelle man folgende Betrachtung an:

Der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ wächst bis zu Ende eines Jahres zu $\frac{100+p}{100}$ oder zu $1{,}0p$ an (d. i. der Zinsfaktor q, siehe Antwort der Frage 4, bezw. der Frage 5 der 2. Auflage), werden nun von diesem Betrag, von diesem Endwert der Geldeinheit, $p_1\,\%$ desselben für Verwaltungskosten abgezogen, so restiert:

$$1{,}0p - \frac{p_1}{100} \cdot 1{,}0p \quad \text{oder:}$$

$$1{,}0p - 0{,}0p_1 \,.\, 1{,}0p \quad \text{oder:}$$

1). . . . $1{,}0p\,(1 - 0{,}0p_1)$

welcher Ausdruck den Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ Zinsen nach Verlauf eines Jahres und nach Abzug von $p_1\,\%$ für Verwaltungskosten am Ende eines Jahres repräsentiert und allgemein durch „Q" bezeichnet sei.

Hiernach wächst die am Anfang des 1. Jahres gemachte Einlage von r Mark bis Ende des 1. Jahres bei $p\,\%$ Zinsen und nach Abzug von $p_1\,\%$ für Verwaltungskosten, an zu:

$$r\,.\,Q \text{ Mark.}$$

Da nun am Anfang des 2. Jahres eine zweite Einlage von r Mark gemacht wird, so hat man am Anfang des 2. Jahres:

a). . . . $r\,.\,Q + r$ Mark

Diese $(r\,.\,Q + r)$ Mark wachsen bis zu Ende des 2. Jahres, da der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ Zinsen nach Verlauf eines Jahres und nach Abzug von $p_1\,\%$ am Ende dieses Jahres mit Q bezeichnet wurde, an zu:

$$(rQ + r)\,.\,Q \quad \text{oder zu:}$$

$$rQ^2 + rQ$$

Da nun am Anfang des 3. Jahres eine dritte Einlage von r Mark gemacht wird, so hat man am Anfang des 3. Jahres:

b). . . . $rQ^2 + rQ + r$ Mark.

In analoger Weise erhält man, wie sich aus der Analogie der Ausdrücke unter a). und b). ergibt, bei fortgesetzten am Anfang eines jeden Jahres gemachten Einlagen r, am Anfang des n^{ten} Jahres für die gesuchte Summe x:

c). $x = rQ^{n-1} + rQ^{n-2} + \cdots + rQ^2 + rQ + r$

Die rechte Seite dieser Gleichung repräsentiert eine geometrische Reihe, deren Summe nach der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41 der 2. Aufl., ist in d. 1. Auflage nicht enthalten.)

gebildet werden kann.

Liest man diese Reihe rückwärts, so ist in derselben:

das Anfangsglied $a = r$
der Quotient $q = Q$
das letzte Glied $t = rQ^{n-1}$

Man erhält somit für die Summe s der Glieder dieser Reihe, bezw. für die gesuchte Summe x:

$$x = \frac{rQ^{n-1} \,.\, Q - r}{Q - 1} \quad \text{oder:}$$

d). . . $$x = \frac{r\,(Q^n - 1)}{Q - 1}$$

Substituiert man in diese Gleich. d). den Wert für Q, siehe den Ausdruck unter 1)., so erhält man:

2). . . $$x = \frac{r\,[(1{,}0p\,(1 - 0{,}0p_1))^n - 1]}{1{,}0p\,(1 - 0{,}0p_1) - 1}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der für r, p, p_1 und n gegebenen Zahlenwerte erhält man hieraus:

$$x = \frac{300\,[(1{,}045\,(1 - 0{,}0125))^8 - 1]}{1{,}045\,(1 - 0{,}0125) - 1}$$

oder:

$$x = \frac{300\,[(1{,}045 \,.\, 0{,}9875)^8 - 1]}{1{,}045 \,.\, 0{,}9875 - 1}$$

$$x = \frac{300\,(1{,}031937^8 - 1)}{1{,}031937 - 1}$$

oder nach Hülfsrechnung 1).:

$$x = \frac{300 \,.\, (1{,}28595 - 1)}{0{,}031937}$$

$$x = \frac{300 \,.\, 0{,}28595}{0{,}031937} = \frac{85{,}785}{0{,}031937}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Summe x, abgerundet = 2686 Mark.

Hülfsrechnung.

1). $\log 1{,}031937^8 = 8 \,.\, \log 1{,}031937$

Nun ist: $\log 1{,}031937 = 0{,}0136376$
$\quad + 126{,}3$
$\quad + 29{,}4$
$\quad 0{,}0136532$
$\quad .\,8$

$\log 1{,}031937^8 = 0{,}1092256$
$\quad 2072$
$\quad 184$
$\quad 169$

mithin:

$1{,}031937^8 = 1{,}28595$

Aufgabe 67. Eine Schuld S ist in n aufeinanderfolgenden Jahren zu gleichen Teilen am Ende eines jeden Jahres abzutragen; wann kann diese Schuld auf einmal bezahlt werden, wenn $p\,\%$ Zinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formel 7: $k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$ (siehe Erkl. 56)

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Soll die Schuld S, welche in den n gleichen Raten $\frac{S}{n}$ am Ende eines jeden der n Jahren zu zahlen ist, auf einmal, nämlich nach x Jahren gezahlt werden, so hat man zu beachten, dass der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung darin besteht, dass der Barwert der n gleichen Ratenzahlungen $\frac{S}{n}$ gleich dem Barwert der nach x Jahren zu zahlenden Gesamtschuld von S Mark sein muss.

Setzt man in vorstehender Formel 7:

$$k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$$ (siehe Erkl. 56)

für die am Ende eines jeden Jahres fällige Summe $r = \frac{S}{n}$, so erhält man aus dieser Formel für den jetzigen oder baren Wert k dieser jährlichen Zahlungen:

$$1). \;.\;.\;.\; k = \frac{\frac{S}{n}(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$$

Setzt man ferner in vorstehender Formel 1ª:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

für den künftigen Wert K die nach x Jahren zu zahlende Gesamtschuld S und für die Anzahl n der Jahre den gesuchten Zahlungstermin, so erhält man aus dieser Formel für den jetzigen oder baren Wert k_1 dieser nach x Jahren zu zahlenden Summe S:

$$S = k_1 \,.\, 1{,}0p^x \text{ bezw.:}$$

$$2). \;.\;.\;.\; k_1 = \frac{S}{1{,}0p^x}$$ (siehe Erkl. 11, bezw. Erkl. 29 der 2. Aufl.)

Da nun, wie erwähnt, die Barwerte k und k_1 gleich sein müssen, so erhält man aus den Gleichungen 1). und 2). für x die Bestimmungsgleichung:

$$3). \;.\;.\;.\; \frac{\frac{S}{n}(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n} = \frac{S}{1{,}0p^x}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{1{,}0p^n - 1}{n \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n} = \frac{1}{1{,}0p^x}$$

$$1{,}0p^x = \frac{n \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n - 1}$$

$$x \,.\, log\, 1{,}0p = log\, n + log\, 0{,}0p + n \cdot log\, 1{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1) \text{ oder:}$$

$$x = \frac{log\, n + log\, 0{,}0p + n \,.\, log\, 1{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1)}{log\, 1{,}0p}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 68. Es hat jemand am Ende des 1., 2., 3., ... n^{ten} Jahres die Summen k_1, k_2, k_3, .. k_n zu zahlen und will die ganze Schuld auf einmal abtragen. Wann muss dies geschehen, wenn der Zinsfuss p % beträgt?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Analog wie in der vorhergehenden Aufgabe 67 besteht auch hier der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung darin, dass die Summe der Barwerte der nach dem 1., 2., 3., ... Jahre zu zahlenden einzelnen Posten k_1, k_2, k_3 ... gleich dem Barwerte der nach x Jahren, nämlich der nach dem gesuchten mittleren Zahlungstermin zu zahlenden Gesamtschuld: $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots)$ sein muss.

Setzt man in der in der Erkl. 135 aufgestellten Gleichung a).:

a). . . $k = \dfrac{K}{1{,}0p^n}$ (siehe vorstehende Formel 1a)

der Reihe nach für K die Werte k_1, k_2, k_3, ... und für n bezw. die Werte 1, 2, 3, ..., so erhält man für die baren Werte der am Ende des 1., 2., 3., ... Jahres zahlbaren Summen k_1, k_2, k_3, ... bezw.

a). . . $\dfrac{k_1}{1{,}0p}, \dfrac{k_2}{1{,}0p^2}, \dfrac{k_3}{1{,}0p^3}, \ldots$

Setzt man ferner in vorstehender Gleichung a). für K die nach x Jahren zu zahlende Gesamtschuld: $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots$ und $n = x$, so erhält man für den baren Wert der nach x Jahren, nach dem mittleren Zahlungstermin zu zahlenden Gesamtschuld:

b). . . $\dfrac{k_1 + k_2 + k_3 + \cdots}{1{,}0p^x}$

Erkl. 135. Nach der Erkl. 11, bezw. der Erkl. 29 der 2. Auflage, besteht zwischen einem nach n Jahren zu p % zahlbaren Kapital K und dessen jetzigem oder baren Wert k die Relation:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

und hieraus erhält man für den baren Wert k des nach n Jahren zu p% zahlbaren Kapitals K:

a). $k = \dfrac{K}{1{,}0p^n}$

Wie erwähnt, ergibt sich hiernach für x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{c).}\quad \frac{k_1}{1{,}0p} + \frac{k_2}{1{,}0p^2} + \frac{k_3}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{k_n}{1{,}0p^n} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \cdots k_n}{1{,}0p^x}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}0p^x \left(\frac{k_1}{1{,}0p} + \frac{k_2}{1{,}0p^2} + \cdots \frac{k_n}{1{,}0p^n} \right) = k_1 + k_2 + \cdots k_n$$

$$1{,}0p^x = \frac{k_1 + k_2 + \cdots k_n}{\frac{k_1}{1{,}0p} + \frac{k_2}{1{,}0p^2} + \cdots \frac{k_n}{1{,}0p^2}}$$

$$x \,.\, log\, 1{,}0p = log\,(k_1 + k_2 + \cdots k_n) - log \left(\frac{k_1}{1{,}0p} + \frac{k_2}{1{,}0p^2} + \cdots \frac{k_n}{1{,}0p^n} \right)$$

oder:

$$x = \left[log\,(k_1 + k_2 + \cdots k_n) - log \left(\frac{k_1}{1{,}0p} + \frac{k_2}{1{,}0p^2} + \cdots \frac{k_n}{1{,}0p^n} \right) \right] : log\, 1{,}0p$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 69. Es hat jemand am Ende eines jeden 2. Jahres 200 Mark gegen 4 % ausgeliehen; wie hoch beläuft sich die ganze Summe am Ende des 16. Jahres?

Formel 5: $K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe stelle man folgende Betrachtung an:

Der Wert der Geldeinheit ist nach Verlauf eines Jahres bei 4 % = 1,04 (siehe Antwort der Frage 4, bezw. der Frage 5 der 2. Auflage); steht diese Geldeinheit noch ein weiteres Jahr zu 4 % auf Zinsen, so ist der Wert mit Zinsen und Zinseszinsen bis zu Ende des 2. Jahres = 1,04 . 1,04 oder = $1{,}04^2$. Hat man auf diese Weise den Wert der Geldeinheit bei 4 % nach Ablauf von zwei Jahren bestimmt (siehe auch Erkl. 136), so lässt sich die Aufgabe wie folgt weiter lösen.

Die am Ende des 2. Jahres zu 4 % auf Zinsen und Zinseszinsen ausgeliehenen 200 Mark wachsen bis zu Ende des

Erkl. 136. Nebenstehende Gleich. 2). hätte man auch erhalten, wenn man in der Formel 5:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

$1{,}0p = q$, also $0{,}0p = q - 1$ setzt, wonach man:

$$K = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

erhält und dann berücksichtigt, dass für den in der Aufgabe gegebenen Fall der Zinsfaktor q, d. i. hier der Wert der Geldeinheit nach Verlauf von zwei Jahren, den Wert: $1{,}0p^2$ substituiert. In Rücksicht der für

$r = 200$
$p = 4$
$n = 16$ gegebenen Zahlenwerte,

erhält man hiernach ebenfalls:

$$K = \frac{200\,(1{,}04^{16} - 1)}{1{,}04^2 - 1}$$

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}04^{16} = 16 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,16$
1021998
170333
$\log 1{,}04^{16} = 0{,}2725328$
5146
182
183,6

mithin:
$num\log 1{,}04^{16} = 1{,}87298$

2). $\log 1{,}04^2 = 2 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$
$.\,2$
$\log 1{,}04^2 = 0{,}0340666$
0667

mithin:
$num\log 1{,}04^2 = 1{,}0816$

4. Jahres, also nach 2 weiteren Jahren an zu:

$$200 \,.\, 1{,}04^2$$

und da zu dieser Zeit abermals 200 Mark ausgeliehen werden, so hat man am Ende des 4. Jahres:

$$200 \,.\, 1{,}04^2 + 200$$

Diese Summe wächst in zwei weiteren Jahren, also bis Ende des 6. Jahres an zu:

$$(200 \,.\, 1{,}04^2 + 200) \,.\, 1{,}04^2$$

oder zu:

$$200 \,.\, 1{,}04^4 + 200 \,.\, 1{,}04^2$$

und da am Ende des 6. Jahres abermals 200 Mark dazu ausgeliehen werden, so hat man bis Ende des 6. Jahres die Summe:

$$200 \,.\, 1{,}04^4 + 200 \,.\, 1{,}04^2 + 200$$

Fährt man mit dieser Betrachtung fort, so findet man in analoger Weise bis zu Ende des 16. Jahres für die gesuchte Summe x:

1). $x = 200 \,.\, 1{,}04^{14} + 200 \,.\, 1{,}04^{12} + 200 \,.\, 1{,}04^{10} + \cdots 200 \,.\, 1{,}04^4 + 200 \,.\, 1{,}04^2 + 200$

Da nun die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe bilden, so erhält man nach der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41 der 2. Aufl., ist in der 1. Auflage nicht enthalten.)

wenn man jene geometrische Reihe rückwärts liest und

für das Anfangsglied $a = 200$
„ den Quotienten $q = 1{,}04^2$
„ das letzte Glied $t = 200 \,.\, 1{,}04^{14}$

setzt, für die gesuchte Summe x:

$$x = \frac{200 \,.\, 1{,}04^{14} \,.\, 1{,}04^2 - 200}{1{,}04^2 - 1}$$

oder:

2). . $x = \dfrac{200\,(1{,}04^{16} - 1)}{1{,}04^2 - 1}$ (siehe Erkl. 136)

Nach den Hülfsrechnungen 1). und 2). geht diese Gleichung über in:

$$x = \frac{200\,(1{,}87298 - 1)}{1{,}0816 - 1}$$

$$x = \frac{200 \,.\, 0{,}87298}{0{,}0816}$$

$$x = \frac{174,596}{0,0816}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Summe x:

$$x = 2139 \text{ Mark } 65 \text{ pf.}$$

Aufgabe 70. Ein Kapital war eine gewisse Zeit hindurch zu 4 % und das so angewachsene Kapital ebensolange zu 4½ % ausgeliehen und ist dadurch auf das 5fache angewachsen. Wie lange war es zu 4 %, bezw. zu 4½ % ausgeliehen?

Formel 1[a]: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl n der Jahre, welche angibt wie lange das Kapital zu 4 %, bezw. wie lange das Kapital zu 4½ % ausgeliehen war, mit x, das ausgeliehene und nicht gegebene Kapital mit y, also den künftigen Wert desselben mit $5 \,.\, y$ und beachtet ferner, dass nach vorstehender Formel 1[a] das auf 4 % ausgeliehene Kapital y in x Jahren anwächst zu:

$$y \,.\, 1{,}04^x$$

und dass dieses Kapital weitere x Jahre zu 4½ = 4,5 % ausgeliehen, zu:

$$(y \,.\, 1{,}04^x) \,.\, 1{,}045^x$$

anwächst, so hat man für x die Bestimmungsgleichung:

$$5y = y \,.\, 1{,}04^x \,.\, 1{,}045^x \quad \text{oder:}$$

1). . $5 = 1{,}04^x \,.\, 1{,}045^x$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}04^x \,.\, 1{,}045^x = 5$$

$$(1{,}04 \,.\, 1{,}045)^x = 5$$

$$x \,.\, (\log 1{,}04 + \log 1{,}045) = \log 5$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 1{,}04 + \log 1{,}045}$$

$$x = \frac{0{,}6989700}{0{,}0170333 + 0{,}0191163}$$

$$x = \frac{0{,}6989700}{0{,}0361496}$$

und hieraus erhält man für x durch einfache Division:

$$x = 19{,}3 \text{ Jahre.}$$

Das betreffende Kapital war hiernach über 19 Jahre zu 4 % und ebensolange zu 4½ % ausgeliehen.

*). **Aufgabe 71.** Es borgt jemand 1000 Mark und verpflichtet sich, in 4 aufeinanderfolgenden Zwischenräumen von 2 Jahren vom 6. Jahre nach Aufnahme des Anlehens an, dieselben zurückzuzahlen. Die drei ersten Zahlungen sollen 300 Mark betragen, die vierte 100 Mark. Wenn nun der Darleiher die Interessen der geliehenen Summe vorausnimmt, wieviel wird er mit Rücksicht der allmäligen Abzahlung seinem Schuldner auszuzahlen haben? Der Zinsfuss sei = 5 %.

Auflösung. Der Billigkeit gemäss muss angenommen werden, dass die gesuchte Barzahlung, welche der Darleiher dem Schuldner leistet, für den letzteren dasselbe ist, als was die Ratenzahlungen, die der Schuldner dem Gläubiger leistet, für diesen sind.

Hiernach besteht der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung in der Gleichsetzung der Barwerte der gegenseitigen Leistungen.

Die Leistungen des Schuldners bestehen in 4 Ratenzahlungen, und zwar in der Zahlung von

300 Mark nach 6 Jahren, in der Zahlung von
300 „ „ 8 „ „ „ „ „
300 „ „ 10 „ und „ „ „ „
100 „ „ 12 „

Da man nun für die baren Werte dieser 4 Zahlungen nach der in der Erkl. 135 aufgestellten Gleichung a).:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

wenn man in derselben für K der Reihe nach 300, 300, 300 und 100, für $p = 5$ und für n bezw. der Reihe nach 6, 8, 10, 12 setzt, die bezüglichen Barwerte:

$$\frac{300}{1{,}05^6},\ \frac{300}{1{,}05^8},\ \frac{300}{1{,}05^{10}},\ \frac{100}{1{,}05^{12}}$$

findet, so erhält man durch Gleichsetzung der Barwerte der gegenseitigen Leistungen für x die Bestimmungsgleichung:

$$x = \frac{300}{1{,}05^6} + \frac{300}{1{,}05^8} + \frac{300}{1{,}05^{10}} + \frac{100}{1{,}05^{12}}$$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1)., 2)., 3). und 4). erhält man hieraus:

$$x = 223{,}865 + 203{,}053 + 184{,}174 + 55{,}6837$$

oder für die Summe x, welche der Darleiher dem Schuldner nach vorherigem Abzug der Interessen unter den gegebenen Bedingungen zu zahlen hat:

$$x = 666 \text{ Mark } 78 \text{ pf.}$$

Hülfsrechnungen.

1). $log \frac{300}{1{,}05^6} = log\, 300 - 6 \,.\, log\, 1{,}05$

Nun ist: $log\, 300 = 2{,}4771213$
$-6 \,.\, log\, 1{,}05 = -6 \,.\, 0{,}0211893 = -0{,}1271358$
$2{,}3499855$
9765
mithin: 90
$\frac{300}{1{,}05^6} = 223{,}865$ 97

2). $log \frac{300}{1{,}05^8} = log\, 300 - 8 \,.\, log\, 1{,}05$

Nun ist: $log\, 300 = 2{,}4771213$
$-8 \,.\, log\, 1{,}05 = -8 \,.\, 0{,}0211893 = -0{,}1695144$
$2{,}3076069$
6030
mithin: 39
$\frac{300}{1{,}05^8} = 203{,}053$ 42,8

3). $log \frac{300}{1{,}05^{10}} = log\, 300 - 10 \,.\, log\, 1{,}05$

Nun ist: $log\, 300 = 2{,}4771213$
$-10 \,.\, log\, 1{,}05 = -10 \,.\, 0{,}0211893 = -0{,}2118930$
$2{,}2652283$
2189
mithin: 94
$\frac{300}{1{,}05^{10}} = 184{,}174$ 94,4

4). $log \frac{100}{1{,}05^{12}} = log\, 100 - 12 \,.\, log\, 1{,}05$

Nun ist: $log\, 100 = 2{,}0000000$
$-12 \,.\, log\, 1{,}05 = -12 \,.\, 0{,}0211893 = -0{,}2542716$
$1{,}7457284$
7226
mithin: 58
$\frac{100}{1{,}05^{12}} = 55{,}6837$ 54,6

Aufgabe 72. *A* legt sein Vermögen von 22000 Mark zu 4 % auf Zinseszinsen und vermehrt dieses Kapital am Ende eines jeden Jahres um 300 Mark; nach welcher Zeit (bis auf Tage genau) wird *A* im Besitze eines Vermögens von 30 000 Mark sein?

Formel 4:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. Setzt man in vorstehender Formel 4:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

$$K = 30\,000$$
$$k = 22\,000$$
$$p = 4$$
$$r = 300$$
$$n = x$$

und löst die somit erhaltene Bestimmungsgleichung:

$$1).\quad 30000 = 22000 \,.\, 1{,}04^x + \frac{300\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04}$$

nach x auf, so erhält man der Reihe nach:

$$30\,000 = 22000 \,.\, 1{,}04^x + 7500\,(1{,}04^x - 1)$$

$$30\,000 = 22000 \,.\, 1{,}04^x + 7500 \,.\, 1{,}04^x - 7500$$

$$22\,000 \,.\, 1{,}04^x + 7500 \,.\, 1{,}04^x = 30000 + 7500$$

$$1{,}04^x\,(22000 + 7500) = 37500$$

$$1{,}04^x = \frac{37500}{29500} = \frac{375}{295}$$

$$x \,.\, \log 1{,}04 = \log 375 - \log 295 \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{\log 375 - \log 295}{\log 1{,}04}$$

Berechnet man hiernach x, so ergibt sich:

$$x = \frac{2{,}5740313 - 2{,}4698220}{0{,}0170333}$$

$$x = \frac{0{,}1042093}{0{,}0170333}$$

$$x = 6\frac{20095}{170333} \text{ Jahre}$$

oder nach der Erkl. 137:

A). . . $x = 6$ Jahre 1 Monat und 12 Tage.

Dies ist, streng genommen, das mathematisch richtige Resultat.

Will man jedoch den sich nach dieser Auflösung ergebenden Jahresbruchteil, analog wie es in Antwort der Frage 15, bezw. Frage 16 der 2. Auflage, geschehen ist, nach dem **im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch** be-

Erkl. 137. Um den Jahresbruchteil: $\frac{20095}{170333}$ in Monate zu verwandeln, multipliziere man denselben mit 12; hiernach erhält man:

$$1\frac{70807}{170333} \text{ Monate.}$$

Um auch noch den Monatsbruchteil in Tage zu verwandeln, multipliziere man denselben mit 30.

Hiernach erhält man für den Jahresbruchteil:

$$\frac{20095}{170333} = 1 \text{ Monat und } 12 \text{ Tage.}$$

Hülfsrechnungen.

1). Aus der nebenstehenden Gleichung 2).:

$$y = 22000 \,.\, 1{,}04^6 + \frac{300\,(1{,}04^6 - 1)}{0{,}04}$$

ergibt sich nach den Hülfsrechnungen 2). u. 3).:

$$y = 27837 + 7500\,(1{,}26532 - 1)$$
$$y = 27837 + 7500 \,.\, 0{,}26532$$
$$y = 27837 + 1989{,}9 \quad \text{oder:}$$
$$y = 29826{,}9 \text{ Mark.}$$

2). $\log 22000 \,.\, 1{,}04^6 = \log 22000 + 6 \,.\, \log 1{,}04$

$$\begin{array}{rcr} \text{Nun ist: } \log 22000 & = & 4{,}3424227 \\ + 6 \,.\, \log 1{,}04 = 6 \,.\, 0{,}0170333 & = & + 0{,}1021998 \\ \hline \log 22000 \,.\, 1{,}04^6 & = & 4{,}4446225 \\ & & 6224 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

mithin:

$$22000 \,.\, 1{,}04^6 = 27837$$

3). $\log 1{,}04^6 = 6 \,.\, \log 1{,}04$

$$\begin{array}{rcr} 6 \,.\, 0{,}0170333 & = & 0{,}1021998 \\ & & 1935 \\ \hline & & 63 \\ & & 68{,}6 \end{array}$$

mithin:

$$1{,}04^6 = 1{,}26532$$

Erkl. 138. Im bürgerlichen Leben wird überall für den Prozentsatz eines Jahresbruchteils der diesem Jahresbruchteil proportionale Teil des jährlichen Zinsfusses gesetzt.

Erkl. 139. Will man den für $\frac{1}{z}$ gefundenen Jahresbruchteil:

$\frac{17310}{119307{,}6}$ in Monate verwandeln, so erhält man durch Multiplikation mit 12:

$$\frac{1}{z} = 1\frac{884124}{119307{,}6} \text{ Monate.}$$

Will man den Monatsbruchteil $\frac{884124}{119307{,}6}$ in Tage verwandeln, so erhält man durch Multiplikation mit 30:

$$\frac{1}{z} = 1 \text{ Monat } 22 \text{ Tage.}$$

stimmen, so berechnet man zunächst die Summe y, bis zu welcher das ausgeliehene und jährlich um 300 Mark vermehrte Kapital von 22000 Mark bis zum Schlusse der vorhin gefundenen 6 ganzen Jahre angewachsen ist.

Hierfür erhält man:

$$2).\quad y = 22000 \,.\, 1{,}04^6 + \frac{300\,(1{,}04^6 - 1)}{0{,}04}$$

oder nach der nebenstehenden Hülfsrechnung 1).:

$$y = 29826{,}9 \text{ Mark.}$$

Am Ende des 6. Jahres hat man hiernach: 29826,9 Mark; es fehlen also noch: 30000 — 29826,9 oder = 173,1 Mark bis die gewünschte Summe von 30 000 Mark erreicht wird. Jene 29826,9 Mark haben also noch so lange zu stehen, bis ihre einfachen Zinsen bei 4 % jährlichen Zinsen den Betrag von 173,1 Mark erreichen. Diese Zeit, welche ein Jahresbruchteil des 7. Jahres ist und dementsprechend mit $\frac{1}{z}$ bezeichnet sei, findet man wie folgt:

4 % heisst:

100 ℳ bringen in 1 Jahr 4 ℳ Zinsen,

100 „ „ somit „ $\frac{1}{z}$ „ $\frac{4}{z}$ „ „ (Erkl. 138)

u. 1 „ bringt „ $\frac{1}{z}$ „ $\frac{4}{z \,.\, 100}$ „ „ mithin

bring. 29826,9 ℳ „ $\frac{1}{z}$ „ $\frac{4 \,.\, 29826{,}9}{z \,.\, 100}$ ℳ Zinsen.

Der in diesem Ausdruck vorkommende Jahresbruchteil $\frac{1}{z}$ muss nun so bestimmt werden, dass diese einfachen Zinsen = dem noch fehlenden Betrag von 173,1 Mark sind. Man hat somit für $\frac{1}{z}$ die Bestimmungsgleichung:

$$3).\;.\;.\;.\quad \frac{4 \,.\, 29826{,}9}{z \,.\, 100} = 173{,}1$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{1}{z} = \frac{173{,}1 \,.\, 100}{4 \,.\, 29826{,}9} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{17310}{119307{,}6}$$

und nach der Erkl. 139:

$$\frac{1}{z} = 1 \text{ Monat und } 22 \text{ Tage.}$$

Nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch erhält man sonach für die gesuchte Zeit y:

B). $y = 6$ Jahre 1 Monat 22 Tage.

Nach letzterer Berechnung erreicht man also, wie sich aus der Vergleichung der unter A). und B). gefundenen Werte ergibt, die gegebene Kapitalhöhe von 30 000 Mark 10 Tage später.

*). **Aufgabe 73.** Ein Fabrikant nimmt zum Ankauf einer Liegenschaft 180 000 Mark auf, um solche in gleichen, am Ende jeden Jahres zu zahlenden Raten in 20 Jahren zu tilgen, wobei der Gläubiger für das Kapital 4 %, für die Raten $3\frac{3}{4}$ % nehmen will. Wieviel wird jede Rate betragen?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 5: $K = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe beachte man, dass der Wert der aufgenommenen Summe von 180 000 Mark bei 4 % Zinseszinsen bis Ende des 20. Jahres, nach vorstehender Formel 1ª, zu:

a). . . . $180000 \,.\, 1{,}04^{20}$

anwachsen wird und dass der Wert aller Ratenzahlungen bis Ende des 20. Jahres ebenfalls gleich dieser Summe sein muss.

Bezeichnet man die am Ende eines jeden Jahres zu zahlende und gesuchte Rate mit x, so hat man, nach vorstehender Formel 5, wenn man in derselben:

$$r = x$$

$$p = 3\frac{3}{4} = 3{,}75, \text{ also } 1{,}0p = 1{,}0375$$
$$\text{bezw. } 0{,}0p = 0{,}0375$$

und $n = 20$ setzt,

für den Wert dieser Ratenzahlungen bis Ende des 20. Jahres:

b). . . . $\frac{x\,(1{,}0375^{20} - 1)}{0{,}0375}$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke unter a). und b). hat man somit für x die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x\,(1{,}0375^{20} - 1)}{0{,}0375} = 180000 \,.\, 1{,}04^{20}$$

und hieraus erhält man:

1). $x = \frac{180000 \,.\, 1{,}04^{20} .\, 0{,}0375}{1{,}0375^{20}}$

Nach nebenstehender Hülfsrechn. 1). ergibt sich hieraus:

$$x = \frac{180000 \,.\, 1{,}04^{20} \,.\, 0{,}0375}{2{,}08815 - 1}$$

$$x = \frac{180000 \,.\, 1{,}04^{20} \,.\, 0{,}0375}{1{,}08815}$$

$$\log x = \log 180000 + 20 \,.\, \log 1{,}04 + \log 0{,}0375 - \log 1{,}08815$$

Nun ist: $\log 180000 = 5{,}2552725$
$+ 20 \,.\, \log 1{,}04 = 20 \,.\, 0{,}0170333 = 0{,}3406660$
$+ \log 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$= 6{,}1699698 - 2$
oder $= 4{,}1699698$
$- \log 1{,}08815 = -0{,}0366888$
$\log x = 4{,}1332810$
2514 / 296 / 288 / 8 / 9,6

mithin:
$x = 13591{,}93$

Jede Rate beträgt also:
13591 Mark 93 pf.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}0375^{20} = 20 \,.\, \log 1{,}0375$
$= 20 \,.\, 0{,}0159881$
$= 0{,}3197620$
7513 / 107 / 104

mithin:
$1{,}0375^{20} = 2{,}08815$

2). $\log 1{,}08815 = 0{,}0366688$
$+ 199{,}5$
$0{,}0366888$

*). **Aufgabe 74.** Ein Fabrikant nimmt zum Ankauf einer Liegenschaft 180 000 Mark auf und will dieselben durch 20 am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Raten von 13591 Mark und 93 pf. tilgen. Welche Summe hat er mit der 8. Ratenzahlung zu zahlen, wenn er zu diesem Zeitpunkt erklärt, den Rest seiner Schuld tilgen zu wollen, und 4 % für die Verzinsung des Kapitals aber nur $3^3/_4$ % für die Verzinsung der Ratenzahlungen in Anschlag gebracht werden?

Formel 1^a: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 5: $K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Bis zu Ende des 8. Jahres repräsentiert die aufgenommene Summe von 180 000 Mark bei 4 % Zinseszinsberechnung, nach vorstehender Formel 1^a, einen Wert von:

a). . . . $180\,000 \,.\, 1{,}04^8$

Die am Ende eines jeden Jahres, bis Ende des 8. Jahres gemachten jährlichen Ratenzahlungen von je 13591,93 Mark repräsentieren bis dahin bei $3^3/_4$ % Zinseszinsberechnung, nach vorstehender Formel 5, einen Wert von:

b). . . $\frac{13591{,}93\,(1{,}0375^8 - 1)}{0{,}0375}$

Am Ende des 8. Jahres beträgt somit der gesuchte Rest x der Schuld:

$$x = 180000 \,.\, 1{,}04^8 - \frac{13591{,}93\,(1{,}0375^8 - 1)}{0{,}0375}$$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1). und 2). ergibt sich hieraus:

Hülfsrechnungen.

1). $\log 180000 \,.\, 1{,}04^8 = \log 180000 + 8 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist: $\log 180000 = 5{,}2552725$
$+ 8 \,.\, \log 1{,}04 = 8 \,.\, 0{,}0170333 = +0{,}1362664$
$\log 180000 \,.\, 1{,}04^8 = 5{,}3915389$
5349 / 40 / 35,4 / 4,6 / 3,5 / 1,1 / 1,06

mithin:
$180000 \,.\, 1{,}04^8 = 246342{,}26$

2). $\log 1{,}0375^8 = 8 \,.\, \log 1{,}0375 = 8 \,.\, 0{,}0159881$
$= 0{,}1279048$
8819 / 229 / 226,8 / 2,2

mithin:
$1{,}0375^8 = 1{,}342470$

Hülfsrechnung.

$$3).\ \log \frac{13591{,}93\,.\,0{,}34247}{0{,}0375} = \log 13591{,}93 + \log 0{,}34247 - \log 0{,}0375$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nun ist: } \log 13591{,}93 = & 4{,}1332514 \\
 & +288 \\
 & +\quad 9{,}6 \\
\hline
 & 4{,}1332812 \\
+\log 0{,}34247 = & +0{,}5346225-1 \\
\hline
 & 4{,}6679037-1 \\
\text{oder} = & 3{,}6679037 \\
-\log 0{,}0375 = & \pm 0{,}5740313 \mp 2 \\
\hline
 & 3{,}0938724+2 \\
\text{oder} = & 5{,}0938724
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
8418 \\
\hline
306 \\
280 \\
\hline
26 \\
24{,}5 \\
\hline
1{,}5 \\
1{,}4
\end{array}$$

mithin ist:

$$\frac{13591{,}93\,.\,0{,}34247}{0{,}0375} = 124128{,}74$$

$$x = 246342{,}26 - \frac{13591{,}93\,(1{,}34247 - 1)}{0{,}0375}$$

$$x = 246342{,}26 - \frac{13591{,}93\,.\,0{,}34247}{0{,}0375}$$

oder nach Hülfsrechnung 3).:

$$x = 246342{,}26 - 124128{,}74$$

Nach der 8. Ratenzahlung beträgt hiernach der Rest der Schuld =

122213 Mark und 52 pf.

welche Summe zur gänzlichen Tilgung am Ende des 8. Jahres noch zu zahlen ist.

Aufgabe 75. Bei dem Ankauf eines Gutes wird dem Käufer freigestellt, nach 30 Jahren 8412 Mark und 74 pf., oder während dieser Zeit am Ende eines jeden Jahres 150 Mark zu zahlen. Wieviel °/₀ brachte der Verkäufer in Anrechnung?

Formel 5: $K = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe beachte man, dass von dem Verkäufer die Bedingungen so gestellt wurden, dass es für ihn selbst gleich sein kann, ob er nach 30 Jahren 8412,74 Mark oder am Ende eines jeden dieser 30 Jahre die Summe von 150 Mark erhält, somit muss der Endwert der am Ende eines jeden Jahres von dem Käufer zu machenden Zahlungen gleich jener Summe sein, welche er anstatt dieser jährlichen Zahlungen am Ende des 30. Jahres zahlen kann.

Setzt man daher in vorsteh. Formel 5:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

$K = 8412{,}74$ Mark
$r = 150$
$n = 30$ und für den gesuchten Zinsfuss
$p = x$

so hat man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1).\ \ 8412{,}74 = \frac{150\,(1{,}0x^{30} - 1)}{0{,}0x}$$

Um diese Gleichung zunächst nach $1{,}0x$ auflösen zu können, setze man für $0{,}0x = 1{,}0x - 1$; hiernach erhält man:

$$8412,74 = \frac{150\,(1,0x^{30} - 1)}{1,0x - 1} \quad \text{oder:}$$

$$8412,74\,(1,0x - 1) = 150\,(1,0x^{30} - 1)$$

$$8412,74 \,.\, 1,0x - 8412,74 = 150 \,.\, 1,0x^{30} - 150$$

$$150 \,.\, 1,0x^{30} - 8412,74 \,.\, 1,0x = -8412,74 + 150$$

oder:

$$150 \,.\, 1,0x^{30} - 8412,74 \,.\, 1,0x = -8262,74$$

2). $$1,0x^{30} - \frac{8412,74}{150} \cdot 1,0x = -\frac{8262,74}{150}$$

Man erhält hiermit eine höhere unreine Gleichung vom 30. Grade (siehe die Erkl. 121).

Will man aus dieser Gleichung x berechnen, so geschieht dies, analog wie es in der Aufgabe 51 angegeben ist, mittelst probieren, indem man für x der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4, 5... setzt und untersucht, welcher von diesen Werten der Gleichung genügt. Man wird finden, dass wenn $x = 4$ gesetzt wird, der Gleich. 2). genügt werden kann.

Der gesuchte Zinsfuss x ist hiernach $= 4\,\%$.

Aufgabe 76. Ein Kapital k steht n Jahre lang zu $P\,\%$ auf Zins; der jährlich fällige Zins desselben wird aber nur zu $p\,\%$ weiter verzinst. Zu welcher Summe ist das Kapital in den n Jahren angewachsen?

Erkl. 140. Bei $P\,\%$ bringen 100 Geldeinheiten P Geldeinheiten Zinsen, somit bringt 1 Geldeinheit $\frac{P}{100}$ Geldeinheiten Zinsen und k Geldeinheiten bringen $\frac{P}{100} \cdot k$ oder $k \,.\, 0,0P$ Geldeinheiten Zinsen.

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1,0p^n$

Auflösung. Die gesuchte Summe, bezeichnet durch K, ist gleich dem auf Zinseszinsen ausstehenden Kapital k, vermehrt um die Zinsen und Zinseszinsen x, welche unter den gegebenen Bedingungen dieses Kapital k in den n Jahren trägt.

Man hat somit die Relation:

1). . . . $K = k + x$

Die noch unbekannten Zinsen und Zinseszinsen x findet man wie folgt.

Nach der Erkl. 140 bringt das ausstehende Kapital k bei $P\,\%$ bis Ende des 1. Jahres $= k \,.\, 0,0P$ einfache Zinsen, und diese einfachen Zinsen des 1. Jahres werden die übrige Zeit, also $n - 1$ Jahre lang zu $p\,\%$ weiter verzinst und wachsen somit nach vorstehender Formel 1ª mit ihren Zinsen und Zinseszinsen nach diesen $n - 1$ weiteren

Jahren, also bis Ende des n^{ten} Jahres, an zu:

a). . . . $k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-1}$

Ferner bringt nach der Erkl. 140 das ausstehende Kapital k bei P % während des 2. Jahres wiederum $= k \cdot 0{,}0P$ einfache Zinsen, und diese einfachen Zinsen des 2. Jahres werden die übrige Zeit, also $n - 2$ Jahre lang zu p % weiter verzinst und wachsen somit nach umstehender Formel 1^a mit ihren Zinsen und Zinseszinsen nach diesen $n - 2$ weiteren Jahren, also bis Ende des n^{ten} Jahres, an zu:

b). . . . $k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-2}$

In analoger Weise erhält man für die p prozentigen Zinsen und Zinseszinsen der je am Ende des 3., 4., ... $(n-1)^{ten}$, n^{ten} Jahres fälligen einfachen Zinsen $k \cdot 0{,}0P$ des Kapitals k bei P %, bis zu Ende des n^{ten} Jahres, bezw. die Werte:

c). . . . $k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-3}$

d). . . . $k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-4}$ u. s. f.

⋮ ⋮ ⋮

$k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-(n-1)}$ oder:

v). . . . $k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p$

und schliesslich:

$k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-n}$ oder:

$k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{0}$ oder:

w). . . . $k \cdot 0{,}0P$

Durch Addition der Ausdrücke unter a)., b)., c)., d)., ... v)., w). erhält man die Zinsen und Zinseszinsen x und die Gleichung 1). geht über in:

$$K = k + k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-1} + k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-2} + k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{n-3} + \cdots + k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p^{2} + k \cdot 0{,}0P \cdot 1{,}0p + k \cdot 0{,}0P$$ oder in:

$$K = k + k \cdot 0{,}0P \cdot \left(1{,}0p^{n-1} + 1{,}0p^{n-2} + 1{,}0p^{n-3} + \cdots + 1{,}0p^{2} + 1{,}0p + 1\right)$$

Da nun die Glieder in der Parenthese auf der rechten Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe bilden, so erhält man für deren Summe s mittelst der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41 der 2. Aufl., ist in d. 1. Auflage nicht enthalten.)

wenn man jene Reihe rückwärts liest und dann in letzterer Formel:

Erkl. 141. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung A). kann man sich als besondere Formel, als:

Formel 22: $K = k \cdot \left[1 + \frac{P}{p}\left(1{,}0p^n - 1\right)\right]$

merken.

Erkl. 142. Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten, z. B. alle $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapital geschlagen, so wird, analog wie in Antwort der Frage 9, bezw. der Frage 10 der 2. Auflage angegeben ist, für:

$P = \frac{P}{m}$, ebenso für $p = \frac{p}{m}$ und für $n = m \cdot n$ gesetzt

und die in der Erkl. 141 unter Nr. 25 aufgestellte Formel geht, mit Berücksichtigung, dass $\frac{P}{m} : \frac{p}{m} = \frac{P}{p}$ und dass ferner $1{,}0p = \frac{100 + p}{100}$ ist, über in:

Formel 22ª:

$$K = k \cdot \left[1 + \frac{P}{p}\left(\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n} - 1\right)\right]$$

für das Anfangsglied $a = 1$
„ den Quotienten $q = 1{,}0p$
„ das letzte Glied $t = 1{,}0p^{n-1}$

setzt:

$$s = \frac{1{,}0p^{n-1} \cdot 1{,}0p - 1}{1{,}0p - 1} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$$

und vorstehende Gleichung geht über in:

$$K = k + k \cdot 0{,}0P \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$$

und hieraus erhält man für den gesuchten Endwert:

$$K = k\left(1 + \frac{0{,}0P \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}\right)$$

oder:

A). $K = k \cdot \left[1 + \frac{P}{p}\left(1{,}0p^n - 1\right)\right]$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe (siehe auch die Erkl. 141).

2. Ungelöste Aufgaben.

Anmerkung. In Betreff der im nachfolgenden angeführten Formeln beachte man das am Schlusse des Buches beigefügte Formelnverzeichnis.

a). Aufgaben zur Anwendung der Formel 1.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 77. Wie hoch wächst ein Kapital von 3865 ℳ in 18 Jahren mit Zins und Zinseszinsen zu 4 % an?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 1.

Aufgabe 78. Ein Kapital von 1500 ℳ steht auf Zinseszinsen zu 4½ %. Was wird daraus nach 36 Jahren?

Aufgabe 79. Zu Oxford in England starb im Jahre 1835 ein Professor, welcher in seinem Testamente ein Legat von 1000 ℳ nach deutschem Gelde stiftete, das 50 Jahre lang zu 4½ % auf Zinseszinsen stehen soll, damit nach Ablauf dieser Zeit dafür ein Lehrstuhl errichtet werden könnte. Wenn nun 1885 dieser Lehrstuhl von dem dadurch entstandenen Kapitale gegründet werden soll, welche Höhe hat bis dahin jenes Kapital erreicht?

Aufgabe 80. Ein Vater will seinem 4jährigen Sohne nach vollendetem 20. Lebensjahre einen Betrag von 5000 ℳ sichern. Welche Summe muss er bei einer Sparkasse, die Einlagen mit 3½ % jährlich verzinst, zahlen, damit in der verlangten Zeit seinem Sohne jenes Kapital verabfolgt werden kann?

Aufgabe 81. Ein Wald, der 15000 cbm enthält, vermehrt sich jährlich um $2\frac{1}{4}\%$. Wieviel cbm wird derselbe nach 80 Jahren liefern?

Aufgabe 82. Ein Forstrevier ist zu 32800 cbm abgeschätzt worden, und man weiss aus der Erfahrung, dass 1000 cbm sich jährlich um 3 cbm vermehren. Wieviel cbm wird dieses Revier, wenn es geschont wird, nach 30 Jahren enthalten?

Aufgabe 83. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt 358180 cbm. Wenn man nun annimmt, dass er sich jährlich um $1\frac{3}{5}\%$ seines jedesmaligen Holzbestandes vermehre, welchen Bestand wird dann der Wald nach 15 Jahren haben?

Aufgabe 84. Ein reicher Mann vermachte in seinem Testamente einer Universität ein Legat von 30000 ℳ mit der Bestimmung, dass es zu $3\frac{1}{2}\%$ auf Zinseszinsen angelegt werden soll und erst nach 100 Jahren die fälligen jährlichen Zinsen der Universität zur anderweiten Verwendung zugestellt werden sollen. Wie gross war das Kapital geworden und über welche Summe konnte alsdann die Universität jährlich verfügen?

Aufgabe 85. Ein zu 2000 cbm abgeschätztes Forstrevier vermehrt sich jährlich um den 50sten Teil; wie gross wird es bei stetem Zuwachs nach 20 Jahren sein?

Andeutung. Beträgt die jährliche Vermehrung den 50sten Teil, so heisst dies auf 50 cbm kommt 1 cbm Vermehrung, also auf 100 2 cbm.

Aufgabe 86. Ein Land hatte vor 20 Jahren 5550000 Einwohner, wie gross ist jetzt die Bevölkerung, wenn die jährliche Zunahme 1,25 % betrug?

Aufgabe 87. In einer gewissen Provinz zählt man gegenwärtig 306280 Menschen. Wenn nun die Bevölkerung jährlich um den 50sten Teil zunimmt, wie gross wird sie nach 100 Jahren sein?

Aufgabe 88. Wie gross wird die Einwohnerzahl einer Stadt, welche jetzt 29600 Einwohner zählt, nach 30 Jahren sein, wenn jährlich auf 165 Menschen 6 Geburten und 8 Sterbefälle treffen?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 21.

Aufgabe 89. Wie gross war eine Bevölkerung vor 50 Jahren, wenn sie sich jedes Jahr durchschnittlich um $\frac{1}{80}$ vermehrte und gegenwärtig 60000 Seelen beträgt?

β). Gesucht: *k*.

Aufgabe 90. Welches Kapital ist nach 27 Jahren bei 5 % mit seinen Zinsen und Zinseszinsen zu 387308,72 ℳ angewachsen?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 2.

Aufgabe 91. Welches Kapital wächst bei $4^3/_4$% in 100 Jahren zu einer Million Mark an?

Aufgabe 92. Der Bestand eines Waldes wurde auf 35000 cbm abgeschätzt. Wenn man nun annimmt, dass der jährliche Zuwachs $1^1/_2$% betragen habe, wie gross war dann der Bestand vor 30 Jahren?

Aufgabe 93. Ein Land, dessen Bevölkerung in den letzten Jahren jährlich um $2^1/_4$% zunahm, zählt jetzt 2509000 Einwohner, welches war die Seelenzahl vor 50 Jahren?

Aufgabe 94. In einer Stadt von 35000 Seelen vermehrt sich die Bevölkerung jährlich um $^1/_{50}$; wie gross war die Bevölkerung vor 12 Jahren?

Aufgabe 95. Wie gross ist der gegenwärtige oder bare Wert eines erst nach 15 Jahren fälligen Kapitals von 1000 ℳ, 5% gerechnet?

Aufgabe 96. *A* schuldet dem *B* 6500 ℳ, nach 10 Jahren (ohne Zinsen) zahlbar. Nun wünscht *A* das Kapital bar abzutragen; wieviel hat *B* zu beanspruchen, wenn er dem *A* 3% Diskonto bewilligt?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 7.

Aufgabe 97. Nach 9 Jahren hat jemand 1500 ℳ ohne Zinsen zu zahlen. Wieviel kann er jetzt bezahlen, wenn der Diskonto $3^1/_2$% beträgt und die Zinseszinsen berücksichtigt werden?

Aufgabe 98. Was sind heute 6900 ℳ wert, welche erst nach 12 Jahren empfangen werden können, bis dahin unverzinslich sind, dabei der Rechnung ein Zinsfuss von $3^1/_3$% zu Grunde gelegt wird?

Aufgabe 99. *A* ist dem *B* 1859 ℳ schuldig, braucht sie aber erst nach 4 Jahren zu zahlen. *B* wünscht sein Guthaben gleich zu erhalten und wird mit *A* einig, einen Rabatt (Diskonto) von $4^3/_4$% zu bewilligen. Wieviel hat *A* zu zahlen?

Aufgabe 100. Wie hoch ist ein Torfstich, der erst nach vollendetem 20sten Jahre 1500 ℳ Nutzen abwirft, zu bezahlen, dass das darauf angelegte Kapital 4% trage?

γ). Gesucht: *n*.

Aufgabe 101. Wie lange müssen 6000 ℳ bei 6% Zinseszinsen ausgeliehen werden, um zu 34461 ℳ 2 ₰ anzuwachsen?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 3.

Aufgabe 102. In wieviel Jahren wachsen 472 ℳ zu $4^1/_2$% mit den Zinsen und Zinseszinsen zu 1357,48 ℳ an?

Aufgabe 103. Wie lange stand ein Kapital von 12388 ℳ, wenn es bei $3\frac{1}{2}\%$ zu 22232 ℳ angewachsen ist?

Andeutung. Man beachte auch die gelöste Aufgabe 5, bezw. Aufgabe 9 der 2. Auflage.

Aufgabe 104. Jemand vermachte testamentarisch 40000 ℳ zur Erbauung einer Schule. Wenn die Kosten dem Voranschlage gemäss 57800 ℳ betragen werden, wie lange muss die testierte Summe auf Zinseszinsen liegen, wenn jenes Kapital zu $4\frac{1}{2}\%$ verzinst wird?

Aufgabe 105. Der Zuwachs eines Waldes betrage 2%. Vor einer gewissen Zeit war der Bestand desselben 45000 cbm und nun ist er 88000 cbm. Wie lange wurde kein Holz mehr gefällt?

Aufgabe 106. Der Holzbestand eines Waldes ist zu 28550 cbm abgeschätzt. Man will aber in diesem Wald erst dann Holz schlagen lassen, wenn er einen Bestand von 36500 cbm hat. Wie lange muss man noch mit dem Fällen warten, wenn ein jährlicher Zuwachs von $\frac{3}{100}$ vorausgesetzt wird?

Aufgabe 107. In wieviel Jahren ist die Volksmenge einer Stadt von 10000 auf 15000 Seelen angewachsen, wenn die jährliche Vermehrung 3 Köpfe auf 100 beträgt?

Andeutung. Man beachte auch die Erkl. 113.

δ). Gesucht: p.

Aufgabe 108. Zu wieviel $\%$ waren 8672 ℳ auf Zinseszinsen ausgeliehen, wenn dieselben nach 16 Jahren zu 15037 ℳ angewachsen sind?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 4.

Aufgabe 109. Zu wieviel $\%$ muss ein Kapital von 18796 ℳ ausgeliehen werden, damit es nach 10 Jahren zu 29189,6 ℳ wächst?

Aufgabe 110. Zu wieviel $\%$ müsste man 1000 ℳ ausleihen, damit sie in 10 Jahren zu 10000 ℳ anwachsen?

Aufgabe 111. Wenn für eine geliehene Summe von 800 ℳ nach Verlauf von 8 Jahren 1000 ℳ ohne weitere Zinsen zurückgezahlt werden, wieviel $\%$ Jahreszinsen wurden hierbei berechnet?

Aufgabe 112. Es verleiht jemand 880 ℳ auf 3 Jahre ohne Zinsen, lässt sich aber einen Schuldschein auf 1000 ℳ lautend ausstellen. Wieviel $\%$ nahm dieser, wenn Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?

Aufgabe 113. Ein Wucherer leiht einem Bedrängten 600 ℳ und lässt sich dafür einen Schuldschein über 800 ℳ ausstellen, zahlbar nach 2 Jahren ohne Zinsen. Wieviel $\%$ nahm dieser, wenn die Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?

Aufgabe 114. Wenn jemand sich gegen ein Darlehen von 2800 ℳ einen Schuldschein über 2900 ℳ lautend ausstellen lässt, die nach 5 Jahren ohne Zins zu zahlen sind, wieviel % wurde da von jenem in Anschlag gebracht?

Aufgabe 115. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes betrug 3500 cbm, vor 12 Jahren, während welcher Zeit er geschont wurde, betrug er 2700 cbm. Um wieviel % hat er sich jährlich vermehrt?

Aufgabe 116. Wieviel % betrug die jährliche Zunahme eines Waldes, der vor 20 Jahren zu 54500 cbm, jetzt aber zu 92800 cbm abgeschätzt wurde?

Aufgabe 117. Die Bevölkerung einer Stadt ist während 12 Jahren von 22500 auf 35660 Seelen angewachsen; wieviel % betrug die jährliche Zunahme?

Aufgabe 118. Die Bevölkerung eines Staates betrug im Jahr 1830 nur 2540000 Seelen, im Jahr 1880 belief sie sich aber auf 5800000; um wieviel % hat die Bevölkerung im Durchschnitt jährlich zugenommen?

Aufgabe 119. Nach der Sündflut sollen nur 3 paar Menschen gelebt haben, deren Fortpflanzung vermöge ihres hohen Alters in 200 Jahren eine Million Köpfe zählte. Wieviel % oder den wievielsten Teil betrug die jährliche Zunahme?

Aufgabe 120. Jakob kam mit 69 Personen nach Egypten, so dass also zusammen 70 Personen waren. Beim Auszuge aus Egypten, also nach 430 Jahren zählte man 660000 Menschen; wie stark musste die jährliche Zunahme der Bevölkerung gewesen sein, wenn man annimmt, dass von 50 Menschen 3 im Durchschnitt jährlich mit dem Tode abgegangen sind?

Aufgabe 121. Eine nach 8 Jahren fällige Schuld von 14875 ℳ und 17 ₰ kann bar mit 10460 ℳ getilgt werden; wieviel % Diskonto wird bei dieser Barzahlung bewilligt?

b). Aufgaben zur Anwendung der Formel 2.

α). Gesucht: n.

Aufgabe 122. In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, wenn es bezw.:

a). zu 3,
b). „ 4,
c). „ $4\frac{1}{2}$
d). „ 5 % ausgeliehen ist?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 5, bezw. der Aufgabe 9 der 2. Auflage.

Aufgabe 123. Wie lange muss ein Kapital zu 4% auf Zinseszinsen stehen, wenn es sich vervierfachen soll?

Aufgabe 124. Vor wieviel Jahren hatte ein Kapital, welches zu $3\frac{1}{2}$% aussteht, nur den dritten Teil seines jetzigen Wertes?

Aufgabe 125. In wieviel Jahren ist die Volksmenge eines Ortes 9mal so gross geworden, wenn die jährliche Vermehrung $2\frac{3}{4}$% beträgt?

Aufgabe 126. In wieviel Jahren wird sich ein zu 5% ausgeliehenes Kapital ver-100-fachen?

β). Gesucht: *p*.

Aufgabe 127. Zu wieviel % muss ein Kapital ausgeliehen werden, wenn es sich
a). in 10 Jahren verdoppeln,
b). „ 30 „ ver-5-fachen,
c). „ 16 „ ver-3-fachen,
d). „ 100 „ ver-100-fachen soll?

Aufgabe 128. Zu welchem Zinsfuss müsste ein Kapital auf Zinseszinsen ausgeliehen werden, um binnen 50 Jahren 7mal so gross zu werden, als es anfangs war?

Aufgabe 129. Die Bevölkerung eines Staates hat sich in den letzten 40 Jahren verdoppelt. Wieviel % beträgt die jährliche Zunahme?

c). Aufgaben zur Anwendung der Formel 3.

α). Gesucht: *K*.

Aufgabe 130. Was wird aus einem Kapital von 15000 ℳ nach 10 Jahren, wenn dasselbe 6% trägt und die Zinsen halbjährlich berechnet werden?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 10.

Aufgabe 131. Was wird aus einem Kapital von 2500 ℳ nach 25 Jahren zu $4\frac{3}{4}$%, wenn die Zinsen halbjährig gerechnet werden?

Aufgabe 132. Was wird aus 36000 ℳ nach 10 Jahren bei $5\frac{1}{4}$%, wenn die Zinsen vierteljährlich berechnet werden?

Aufgabe 133. Jemand hat vor 16 Jahren ein Kapital von 950 ℳ zu $4\frac{1}{2}$% auf Zinseszinsen gegeben und sich die Zinsen monatlich berechnen lassen. Wie hoch ist das Kapital angewachsen?

Aufgabe 134. Zu welcher Summe wachsen 1000 ℳ in 10 Jahren bei $3\frac{3}{4}$% Zinseszinsberechnung an, wenn die Zinsen
a). jährlich,

b). halbjährlich,
c). vierteljährlich,
d). monatlich
zum Kapital geschlagen werden?

β). Gesucht: k.

Aufgabe 135. Ein Kapitalist, der bei mehreren Fabrikanten ein Kapital zu $3^3/_4$ % jährlichen Zinsen stehen hat, lässt sich alle $^1/_4$-Jahr die Zinsen bezahlen und vermehrt durch dieselben sein Kapital. Hierdurch wuchs dasselbe nach 9 Jahren zu 83 954 ℳ 2 ₰ an. Wie gross war das ausgeliehene Kapital?

γ). Gesucht: n.

Aufgabe 136. Wann wird sich ein Kapital, zu 5 % angelegt, bei halbjähriger Verzinsung mit seinen Zinsen und Zinseszinsen verdoppelt haben?

d). Aufgaben zur Anwendung der Formel 4.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 137. Jemand hat ein Vermögen von 2800 ℳ, welches zu 4 % aussteht, und vermehrt dasselbe jährlich nicht allein um die Zinsen, sondern auch noch um 500 ℳ. Wie gross wird dieses Kapital nach 8 Jahren sein?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 11.

Aufgabe 138. Ein Beamter hat sein Vermögen von 2000 ℳ zu $3^3/_4$ % angelegt und schlägt am Ende jedes Jahres nicht allein die jährlichen Zinsen, sondern auch noch 350 ℳ, nämlich den Ueberschuss seiner Besoldung über seine jährlichen Ausgaben, zu dem Kapital. Welche Summe wurde seinen Erben ausbezahlt, als er von da ab nach Verlauf von 22 Jahren starb?

Aufgabe 139. Es legt jemand den Betrag von 1000 ℳ in eine Sparkasse und nach Verlauf eines jeden folgenden Jahres einen weiteren Betrag von 150 ℳ 75 ₰. Welches ist der Gesamtbetrag der ersparten Summe in 20 Jahren, die Zinseszinsen zu $3^1/_3$ % gerechnet?

Aufgabe 140. Es legt jemand 160 ℳ in eine Sparkasse, welche $3^1/_4$ % Zinseszins vergütet und vermehrt diese Einlage jährlich um 50 ℳ; wieviel beträgt seine Ersparnis am Ende des 25. Jahres?

β). Gesucht: k.

Aufgabe 141. Jemand will ein Kapital auf Zinsen legen, dass er nach Ablauf von 20 Jahren bei einem jährlichen Zuschuss von 350 ℳ ein Vermögen von 40 000 ℳ hat. Mit welcher Summe muss er anfangen, $3^3/_4$ % gerechnet?

γ). Gesucht: r.

Aufgabe 142. Jemand hat 3550 ℳ auf Zinsen zu $4\frac{1}{4}\%$. Wieviel muss er jährlich, 15 Jahre lang, zulegen, dass er nach Ablauf dieser Zeit 25000 ℳ Vermögen hat?

Aufgabe 143. Wieviel muss am Schlusse eines jeden Jahres zu einem Kapital von 3000 ℳ hinzugefügt werden, damit es bei $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins sich in 8 Jahren verdoppelt?

δ). Gesucht: n.

Aufgabe 144. 30 ℳ werden jährlich um 36 ℳ vermehrt; nach wieviel Jahren hat man mit den Zinsen und Zinseszinsen, zu 3 % gerechnet, 300 ℳ?

Andeutung. Man beachte die gelöste Aufgabe 48.

Aufgabe 145. In einem Staate leben gegenwärtig 928500 Menschen. Wenn nun von 42 Menschen durchschnittlich einer stirbt und auf 68 jährlich eine Geburt kommt, ausserdem jährlich 680 Menschen einwandern; nach wieviel Jahren wird dieser Staat ca. $1\frac{1}{2}$ Million Einwohner zählen?

e). Aufgaben zur Anwendung der Formel 5.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 146. Am Ende eines jeden Jahres werden 10 Jahre lang nacheinander 150 ℳ zu 5 % angelegt; wieviel betragen diese Anlagen zusammen mit ihren Zinseszinsen am Ende des 10. Jahres?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 14.

Aufgabe 147. Ein Beamter legt jährlich von seinem Einkommen 200 ℳ zurück. Wie hoch wächst diese Summe in 16 Jahren an, die Zinsen zu $4\frac{3}{4}\%$ gerechnet?

Aufgabe 148. Eine mit einem Grundkapital von 6 Millionen fundierte Lebensversicherungsgesellschaft verzinst die Sparkasseneinlagen mit $3\frac{1}{2}\%$ Zinseszinsen. Wenn nun jemand 15 Jahre nacheinander jedesmal 200 ℳ einzahlt, welche Summe hat er bei dieser Sparkasse zu gut?

Aufgabe 149. Ein Pachter blieb von seiner Pacht jährlich 450 ℳ schuldig. Wie hoch belief sich seine Schuld nach 10 Jahren, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ veranschlagt?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 12.

β). Gesucht: r.

Aufgabe 150. Durch 15 gleiche, am Ende eines jeden Jahres in eine Sparkasse eingelegte Summen will sich jemand ein Kapital von 1737 ℳ erwerben. Wie gross muss jede dieser Summen (Einlagen) sein, wenn die Sparkasse Zinseszinsen zu $3\frac{3}{4}\%$ verrechnet?

Aufgabe 151. Wieviel Mark müsste jemand jährlich ersparen, wenn er das Ersparte am Ende jeden Jahres sogleich zu $3\frac{1}{2}\%$ Zinsen unterbrächte und auf Zinseszinsen stehen liesse, um nach Verlauf von 20 Jahren, von der ersten zinsbaren Unterbringung an gerechnet, sich auf diese Weise ein Kapital von 10000 ℳ gesammelt zu haben?

γ). Gesucht: n.

Aufgabe 152. Am Ende eines jeden Jahres will jemand 266 ℳ 83 ₰ bei einer Sparkasse einzahlen und zwar so lange, bis diese Kasse ein Kapital von 4247 ℳ auszahlen muss. Wie oft muss er jene Einzahlungen machen, wenn die Sparkasse 5% Zinseszinsen in Anrechnung bringt?

Aufgabe 153. Um sich nach Verfluss einer gewissen Zeit ein Kapital von 28234,3 ℳ zu sichern, legt A am Ende eines jeden Jahres 900 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$ auf Zinseszinsen an; nach wieviel Jahren sah er sich im Besitz der gewünschten Summe?

Aufgabe 154. Ein Beamter erspart sich von seinem geringen Einkommen jährlich 60 ℳ und legt diese auf Zinsen. Nach wieviel Jahren wird er ein Vermögen von 8000 ℳ zusammen haben, die Zinsen zu $3\frac{3}{4}\%$ gerechnet?

Aufgabe 155. Wenn von heute an jährlich ein Kapital von 1850 ℳ zu 4% auf Zinseszinsen gegeben wird, wievielmal muss dieses geschehen, bis der Wert der ausgeliehenen Kapitalien die Summe von 30000 ℳ erreicht, bezw. dieselbe übertrifft.

f). Aufgaben zur Anwendung der Formel 6.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 156. Ein Privatier, der ein Vermögen von 150000 ℳ hat, zieht jährlich aus seinem Gelde 5% und gebraucht hiervon zu seiner Haushaltung 3000 ℳ Wie gross wird sein Vermögen nach 15 Jahren sein?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 15.

Aufgabe 157. Ein Kapitalist besitzt ein Vermögen von 240000 ℳ, welches sich zu 4% verzinst. Er verbraucht jährlich eine gewisse Summe der Zinsen zu seinem Unterhalte und schlägt den Rest desselben zum Kapital. Nach 20 Jahren sieht er sich im Besitz von 285000 ℳ Wieviel hat er jährlich verbraucht?

Andeutung. In dieser Aufgabe ist $r = x$ zu setzen.

Aufgabe 158. Von einer Schuld im Betrage von 3260 ℳ, die zu 4% verzinst ist, werden am Ende eines jeden Jahres 100 ℳ abgetragen. Wieviel beträgt die Schuld nach Ablauf von 10 Jahren?

Aufgabe 159. Ein Unternehmer leiht von einer Bank zum Ankauf eines Hauses die Summe von 25000 ℳ gegen 5 % Zinsen. Dieses Anlehen soll nun durch 14 jährliche Abzahlungen getilgt werden und zwar so, dass nach Ablauf eines jeden Jahres 2500 ℳ bezahlt werden. Welcher Rest der Schuld bleibt nach der letzten Zahlung noch übrig?

Aufgabe 160. Wieviel beträgt nach 8 Jahren der Rest einer Schuld von 4000 ℳ, die zu $3\frac{3}{4}$ % steht, wenn jährlich mit den Zinsen 500 ℳ bezahlt werden?

Aufgabe 161. In einem Gemeindewald, der 15680 cbm Holz enthält und dessen Zuwachs jährlich 3 % beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 760 cbm Holz geschlagen. Wieviel cbm wird der Wald nach 9 Jahren noch enthalten?

Aufgabe 162. Ein Waldbestand, der auf 80000 cbm abgeschätzt wird, vermehrt sich in jedem Jahr um $3\frac{1}{3}$ %. Wieviel wird nach 25 Jahren vorhanden sein, wenn jährlich 1000 cbm gehauen werden?

β). Gesucht: k.

Aufgabe 163. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes ist 3000 cbm, und man weiss, dass der jährliche Zuwachs auf 100 cbm $2\frac{1}{2}$ cbm beträgt, und dass 12 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 650 cbm geschlagen worden sind. Wie gross war der Bestand vor 12 Jahren?

γ). Gesucht: r.

Aufgabe 164. Wie gross muss der jährliche Abtrag sein, damit von einem auf 10 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehenen Kapital im Betrage von 10000 ℳ noch 1000 ℳ übrig bleiben?

Aufgabe 165. Der Zuwachs eines Waldes betrage $2\frac{4}{5}$ %, sein gegenwärtiger Bestand 42900 cbm. Wieviel cbm dürfen am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden, damit der Bestand nach 10 Jahren noch 20000 cbm betrage?

Aufgabe 166. Ein Waldbestand, der jetzt zu 20000 cbm abgeschätzt und dessen Zuwachs jährlich auf $3\frac{1}{2}$ % gerechnet wird, soll in der Art geschont werden, dass er nach 15 Jahren 30000 cbm beträgt. Wieviel kann man jährlich hauen?

δ). Gesucht: n.

Aufgabe 167. Von einem Kapital A, das zum Zinsfuss p steht, werden jährlich r ℳ abgezogen. Nach wieviel Jahren wird sich das Kapital auf a ℳ reduziert haben?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 48.

Aufgabe 168. Jemand vermacht einer Unterrichtsanstalt 15 000 ℳ in 4 % Rentenbriefen; bestimmt aber, dass erst dann alle Zinsen teils zu Stipendien, teils zur Vermehrung der Bibliothek verwendet werden sollen, wenn das Stiftungskapital auf 60 000 ℳ angewachsen ist. In wieviel Jahren hat es diese Höhe erreicht, wenn man jährlich nur 240 ℳ an Stipendien verteilt?

g). Aufgaben zur Anwendung der Formel 7.

α). Gesucht: k.

Aufgabe 169. Wie gross ist die Schuld, welche zu $4\frac{1}{4}$ % Zinseszinsen verzinst, durch eine am Ende eines jeden Jahres fällige Abzahlung von 1050 ℳ in 9 Jahren getilgt wird?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 17.

Aufgabe 170. Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung übernehmen, dasselbe durch einen am Ende jeden Jahres zahlbaren Betrag von 15 000 ℳ binnen 15 Jahren zu tilgen; welche Summe wird die Bank der Stadt bei 4 % Zinseszinsberechnung leihen können?

Aufgabe 171. Um einen Wald vollständig abzutreiben, bedarf es bei einem jährlichen Hiebe von 1800 cbm 20 Jahre; wieviel macht der gegenwärtige Bestand aus, wenn der Zuwachs $2\frac{1}{4}$ cbm auf 100 angenommen wird?

β). Gesucht: r.

Aufgabe 172. Eine jetzt zu zahlende Schuld von 4000 ℳ soll durch 25 gleiche Zahlungen, die von jetzt ab am Ende eines jeden Jahres fällig sind, getilgt werden. Wie gross muss eine solche jährliche Teilzahlung sein, wenn 4 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Aufgabe 173. Jemand der eine Schuld von 25000 ℳ hat, die er zu $3\frac{1}{5}$ % verzinsen muss, will dieselbe in 18 Jahren abtragen. Wieviel hat er jährlich mit den Zinsen zu bezahlen?

Aufgabe 174. Eine jetzt zahlbare Schuld von 8450 ℳ soll in 18 jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Wie hoch muss man eine solche dieser Terminalzahlungen ansetzen, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{5}$ % gerechnet werden und die erste Zahlung nach einem Jahr zu geschehen hat?

Aufgabe 175. Es hinterlässt jemand seinem 14jährigen Sohn ein Vermögen von 9000 ℳ, welches 5 % trägt. Wieviel darf der Vormund auf die Erziehung des Knaben jährlich höchstens verwenden, wenn das Vermögen bis zu dessen vollendetem 24sten Jahre ausreichen soll?

Das Geld wird am Schlusse jeden Jahres dem Kapitale entnommen, um die Auslagen zu berichtigen.

Aufgabe 176. Ein Kaufmann, der sogleich 50000 ℳ zu erlegen hat, verpflichtet sich, diese Summe in 12 gleichen Jahresraten samt $3^3/_4$% Zinseszinsen abzutragen. Wie gross wird eine solche Rate sein?

Aufgabe 177. Um die Kosten einer Neupflasterung zu decken, nahm die Stadt *B* bei der Provinzialhilfskasse ein zu $3^1/_2$% verzinsliches Darlehen im Betrage von 14040 ℳ mit der Verpflichtung auf, dieses binnen 12 Jahren zu amortisieren. Wieviel muss die Stadt jährlich bezahlen?

Aufgabe 178. Zum Neubau eines Krankenhospitals nahm eine Kirchengemeinde 150000 ℳ zu 4% verzinslich auf und verpflichtet sich, diese Anleihe in den nächsten 50 Jahren durch gleiche jährliche Raten zu amortisieren. Auf wieviel belief sich die Rate?

Aufgabe 179. Um ein $3^2/_5$% Staatsanlehen von 7 Millionen in 20 Jahren in gleichen Raten zu tilgen, ist jährlich welche Tilgungsquote zu zahlen?

Aufgabe 180. Ein Wald, dessen gegenwärtiger Bestand 15800 cbm beträgt, soll in 25 Jahren abgetrieben werden; wieviel cbm müssen jährlich im Durchschnitt geschlagen werden, wenn der jährliche Zuwachs 2% beträgt?

γ). Gesucht: n.

Aufgabe 181. Eine jetzt zu zahlende Schuld von 8000 ℳ soll durch am Ende eines jeden Jahres zu machende Zahlungen von 350 ℳ getilgt werden. Wie oft müssen diese Zahlungen gemacht werden, wenn hierbei die Schuld zu $4^1/_2$% verzinst werden soll und welche Summe ist im letzten Jahre zu zahlen?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 49.

Aufgabe 182. Jemand hat sein ganzes Vermögen von 100000 ℳ zu 5% auf Zinsen gegeben, ist aber nicht im stande mit den Zinsen dieses Kapitals seinen Aufwand zu bestreiten, weil er dazu jährlich 6000 ℳ braucht. Er ist daher genötigt, am Ende eines jeden Jahres so viel am Kapital hinweg zu nehmen, dass dieses samt den erhaltenen Zinsen 6000 ℳ beträgt. Nach wieviel Jahren wird dieser Mann, wenn er so fortfährt, sein Kapital aufgezehrt haben?

Aufgabe 183. Nach wieviel Jahren wird eine zu $4^1/_2$% gemachte Anleihe von 12 Millionen ℳ amortisiert sein, wenn jährlich 715566 ℳ zur Bezahlung der Zinsen und Tilgung eines Teils der Anleihe verwendet werden?

Aufgabe 184. Eine Anleihe von k ℳ soll zu 4% verzinst werden. Wenn nun zur Zinszahlung und Amortisation jährlich 5% des ursprünglichen Kapitals ausgesetzt werden, in wieviel Jahren wird die Anleihe getilgt sein?

Aufgabe 185. Nach wieviel Jahren wird ein Wald ganz abgetrieben sein, wenn der gegenwärtige Bestand 13000 cbm beträgt, der Zuwachs jährlich zu $2^1/_2$ % angenommen wird und am Ende eines jeden Jahres 1600 cbm gefällt werden?

Aufgabe 186. Wie lange kann ein verpfändetes Grundstück benutzt werden, auf dessen Niessbrauch ein Kapital von 40000 ℳ geliehen wurde, wenn das Grundstück einen reinen Gewinn von 3000 ℳ jährlich abwirft und der Rechnung 5 % Zinsen zu Grunde gelegt werden?

δ). Gesucht: p.

Aufgabe 187. Bei einem Kreditverein machte ein Handwerker ein Anlehen von 1000 ℳ; zur Tilgung desselben musste er am Ende eines jeden Jahres, 25 Jahre lang, 70 ℳ 95 ₰ bezahlen. Wieviel % berechnete der Kreditverein?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 51.

h). Aufgaben zur Anwendung der Formeln 8 und 9.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 188. Ein Kapital von 2222 ℳ steht zu 4 % auf Zinseszinsen und wird zu Anfang des 2ten und jedes folgenden Jahres noch um 150 ℳ vermehrt. Wie gross ist die Summe nach 12 Jahren?

Aufgabe 189. Jemand hat sein Vermögen von 34600 ℳ zu 5 % auf Zinseszinsen ausstehen und nimmt davon zu seinem Unterhalte am Anfang eines jeden Jahres 3000 ℳ; welches wird der Rest seines Vermögens nach 10 Jahren sein?

Aufgabe 190. Ein Wald wird zu k cbm abgeschätzt. Zu Anfang eines jeden Jahres sollen r cbm geschlagen werden; wie gross ist der Bestand nach dem nten Hiebe, wenn der jährliche Zuwachs zu p % angenommen wird?

Aufgabe 191. Ein Vater hinterlässt seinem 12jährigen Sohn 8500 ℳ, welche auf Zinseszinsen zu $4^1/_4$ % verwaltet werden. Wenn von diesem Kapital für den Lebensunterhalt und die Ausbildung zu Anfang eines jeden Jahres 800 ℳ erhoben werden, welche Summe kann dem Sohne noch ausgehändigt werden, wenn er 22 Jahre alt ist?

β). Gesucht: r.

Aufgabe 192. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes wird zu 26500 cbm geschätzt und soll durch 12 Hiebe, welche zu Anfang eines jeden Jahres vorgenommen werden, auf den Bestand von 8000 cbm zurückgeführt werden; wieviel muss jährlich geschlagen werden, wenn der Zuwachs $2^1/_2$ % beträgt?

i). Aufgaben zur Anwendung der Formel 10.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 193. Jemand legt 20 Jahre lang am Anfang jeden Jahres 700 ℳ zurück. Wieviel beträgt das gesamte Kapital nach 20 Jahren bei $4^1/_4$ % Zinseszinsen?

Aufgabe 194. Jemand zahlt durch 20 Jahre jedesmal zu Beginn des Jahres 30 ℳ in eine Anstalt ein, welche die eingezahlten Beiträge mit $3^3/_4$ % verzinst. Zu welcher Summe sind diese Beträge bis Ende des 20. Jahres samt ihren Zinsen und Zinseszinsen angewachsen?

Aufgabe 195. Jemand ist verpflichtet, sieben Jahre hintereinander mit dem Anfange eines jeden Jahres 800 ℳ zu bezahlen, ist aber mit der Zahlung rückständig geblieben; wieviel ist er am Anfange des 9ten Jahres schuldig, wenn die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet werden?

Aufgabe 196. Jemand hat 9 Jahre nacheinander 500 ℳ zu bezahlen; er bleibt sie aber bis zu Anfang des 9ten Jahres schuldig; wieviel beträgt nun zu dieser Zeit seine Schuld, wenn $4^1/_3$ % gerechnet werden?

β). Gesucht: r.

Aufgabe 197. Wieviel muss jemand 30 Jahre hindurch zu Anfang jeden Jahres zu 4 % auf Zinsen legen, damit er nach Ablauf der genannten Zeit ein Kapital von 25000 ℳ hat?

Aufgabe 198. Eine Schuld von 25000 ℳ soll in 18 gleichen jährlichen Quoten zu Anfang eines jeden Jahres bezahlt werden. Wie hoch ist eine solche Quote, wenn die erste ein Jahr nach Kontrahierung der Schuld fällig ist und $5^1/_2$ % Zinseszinsen gerechnet werden?

Aufgabe 199. Wenn jemand sein Vermögen, das 12000 ℳ betrug und zu $4^1/_2$ % auf Zinseszinsen ausgeliehen ist, in 20 Jahren aufbrauchen will, wieviel kann derselbe durchschnittlich am Anfang jeden Jahres wegnehmen?

γ). Gesucht: n.

Aufgabe 200. In einem Walde, der gegenwärtig zu 35000 cbm abgeschätzt ist, sollen zu Anfang eines jeden Jahres 1850 cbm geschlagen werden; nach wieviel Jahren wird der Wald abgetrieben sein, wenn der jährliche Zuwachs von $3^1/_2$ % vorausgesetzt wird?

k). Aufgaben zur Anwendung der Formeln 11—17.

α). Gesucht: K.

Aufgabe 201. Wenn jemand halbjährlich 800 ℳ bezieht und diese sogleich zu 4 % in der Weise anlegt, dass ihnen auch halbjährlich die Zinsen zugeschlagen werden, so hat er nach 16 Jahren wieviel erspart?

Aufgabe 202. Jemand legt am 1. Januar und am 1. Juli eines jeden Jahres einen Betrag von 500 ℳ auf Zinseszinsen an. Wie gross ist der Wert der gesamten Einlagen nach 10 Jahren vom Tage der ersten Einlage an gerechnet, wenn der halbjährigen Verzinsung der Zinsfuss von 3 % zu Grunde gelegt ist?

β). Gesucht: *n*.

Aufgabe 203. Es übergibt jemand einer Stadtverwaltung 60000 ℳ mit der Bestimmung, dieses Kapital zu 4 % auszuleihen, aber die in $\frac{1}{4}$jährlichen Terminen eingehenden Zinsen so lange jedesmal zum Kapitale zu schlagen, bis dieses Kapital die Summe von 180000 ℳ übersteigt; alsdann sollen die Zinsen jedesmal unter die Armen verteilt werden. Nach Ablauf welcher Zeit fängt die Verteilung an?

Aufgabe 204. Auf einem Gute lastet eine Hypothek von 45500 ℳ mit der Bedingung, dass die Rückzahlung derselben in halbjährigen Quoten von 8460 ℳ bei jährlicher Zinsberechnung von $4\frac{1}{2}$ % erfolgt.

Nach wieviel Jahren ist die Schuld getilgt und welche Summe ist im letzten Jahre zu bezahlen?

l). Aufgaben zur Anwendung der Formel 18 und sonstige Aufgaben, in welchen die Anzahl *n* der Jahre eine gebrochene ist.

α). Gesucht: *K*.

Aufgabe 205. Was wird aus einem Kapital von 68000 ℳ zu 4 % auf Zinseszinsen nach $7\frac{1}{2}$ Jahren?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 20.

Aufgabe 206. Zu welcher Summe wachsen 7000 ℳ bei $4\frac{1}{4}$ % Zinseszinsen in 10 Jahren und 9 Monaten an?

Aufgabe 207. Jemand gibt 20000 ℳ auf Zinseszinsen zu 6 % jährlich; wieviel kann er nach $12\frac{1}{2}$ Jahren zurückfordern?

Aufgabe 208. Zu welcher Summe wachsen 5000 ℳ in 3 Jahren 8 Monaten bei 5 % Zinseszinsen an?

Aufgabe 209. Am 1. Juli 1877 gab man 20000 ℳ zu $4\frac{3}{4}$ % auf Zinsen. Am 1. April 1885 soll das Kapital mit den Zinsen und Zinseszinsen ausgezahlt werden. Welche Summe ist auszuzahlen?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 52.

Aufgabe 210. Zu welcher Summe waren 2650 ℳ, welche am 2. September 1872 auf Zinsen ausgegeben wurden, bis zum 21. Juni 1880, wo sie ausbezahlt wurden, bei $3\frac{1}{4}$ % angewachsen?

β). Gesucht: k.

Aufgabe 211. Ein am 1. Januar 1873 zu $4^3/_4$ % ausgeliehenes Kapital wurde am 1. Juli 1884 mit 15000 ℳ zurückgezahlt. Wie gross war dasselbe ursprünglich?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 53.

Aufgabe 212. Ein am 1. April 1869 eingezahltes Kapital wurde am 1. Dezember 1884 mit 16957 ℳ zurückgezahlt. Wie gross war dasselbe ursprünglich?

γ). Gesucht: n.

Aufgabe 213. Vor wieviel Jahren war ein Kapital von 5000 ℳ, welches zu 6 % auf Zinseszinsen stand, 5000 ℳ wert?

Aufgabe 214. Vor wieviel Jahren hatte ein Kapital, welches zu 4 % aussteht, nur den dritten Teil seines jetzigen Wertes?

Aufgabe 215. Wann wurden 7000 ℳ zu $4^2/_3$ % auf Zinseszinsen gegeben, die am 5. Mai 1884 mit 15000 ℳ zurückgezahlt wurden?

Aufgabe 216. Es hat jemand 4000 ℳ und möchte dieselben eines bestimmten Zweckes wegen erst dann in Angriff nehmen, wenn sie zu 9000 ℳ angewachsen sind; wann kann dies geschehen, wenn das Kapital zu $4^1/_2$ % auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?

δ). Gesucht: p.

Aufgabe 217. Ein Wucherer leiht einem Bedrängten 600 ℳ und lässt sich darüber einen nach $2^1/_2$ Jahren ohne Zinsen zahlbaren Wechsel auf 800 ℳ ausstellen. Wieviel % nahm der Wucherer?

Aufgabe 218. Ein am 18. Juli 1894 fälliges Kapital von 3560 ℳ wurde schon am 6. Mai 1884 mit 5000 ℳ bezahlt. Wieviel % Diskonto wurden in Anrechnung gebracht?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 55.

Aufgabe 219. Zu wieviel % ist ein Kapital von k (= 1500) ℳ bei halbjähriger Kapitalisierung der Zinsen angelegt, wenn es nach n (= $2^1/_2$) Jahren samt Zinseszinsen zu K (= 2204) ℳ anwächst?

Aufgabe 220. Wieviel beträgt
a). der halbjährliche,
b). der vierteljährliche und
c). der monatliche Zinsfuss,
wenn der jährliche = 5 % ist?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 46.

Aufgabe 221. Wieviel beträgt
a). der halbjährliche,
b). der vierteljährliche und
c). der monatliche Zinsfuss,
wenn der jährliche = 4 % ist?

Aufgabe 222. Wieviel beträgt der jährliche Zinsfuss, wenn
a). der monatliche = $^1/_2$ %,
b). der vierteljährliche = 1 % und
c). der halbjährliche = 3 % beträgt?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 47.

m). Besondere Aufgaben.

α). Aufgaben, welche durch Ansetzen von Gleichungen und durch Verbinden der aufgestellten Formeln 1—20 gelöst werden.

Aufgabe 223. Ein Vater hinterlässt seinen 6 Kindern ein Vermögen von 18000 ℳ, welches auf Zinseszinsen zu 5 % angelegt ist. Wenn nun die Kinder am Ende eines jeden Jahres 1200 ℳ zu ihrem Unterhalte davon beziehen, wieviel trifft dann ein Kind nach 8 Jahren, wenn gleiche Teile gemacht werden?

Andeutung. Man berechne das Endkapital und teile dasselbe in 8 gleiche Teile.

Aufgabe 224. Jemand hinterlässt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 45000 ℳ, das zu $3^1/_2$ % auf Zinsen steht. Es werden 6 Jahre hindurch jährlich 3000 ℳ für die Erziehung der Kinder ausgegeben, dann wurde das Vermögen unter die Kinder gleich geteilt. Wieviel kam auf jedes Kind?

Aufgabe 225. Welches Kapital wächst in 14 Jahren bei 5 % ebenso hoch an, als ein um 3500 ℳ grösseres Kapital zu 4 % in 8 Jahren?

Aufgabe 226. Wie gross muss ein Kapital sein, welches zu 4 % steht, wenn dasselbe nach 15 Jahren ebensoviel wert sein soll, als 4500 ℳ zu 6 % nach 9 Jahren?

Aufgabe 227. Zwei befreundete Kaufleute gründen gleichzeitig ihre Geschäfte, der erste mit einem Kapital von 50000 ℳ, der andere mit einer anderen Summe. Nach 8 Jahren zeigt ihr Bücherabschluss, dass ihr Vermögen gleich ist und zwar, dass der erste 15 %, der zweite 18 % Zins und Zinseszins gewonnen hat. Welches war das ursprüngliche Kapital des zweiten?

Aufgabe 228. Ein Kapital, welches 10 Jahre zu 5 % ausstand, dann 7000 ℳ verlor und die 30 folgenden Jahre zu $4^1/_2$ % ausgeliehen war, ist durch Zinseszinsen auf 70000 ℳ angewachsen; wie gross war dasselbe ursprünglich?

Aufgabe 229. Wie lange muss ein Kapital von 15000 ℳ zu $3^1/_2$ % auf Zinseszinsen stehen, damit es sich um 8400 ℳ vermehrt?

Andeutung. Man beachte, dass $K = 15\,000 + 8400$ ist.

Aufgabe 230. Zwei Kapitalien von 10000 und 12500 ℳ werden zu gleicher Zeit, bezw. zu 4 % und $3^1/_2$ % auf Zinseszinsen ausgeliehen. Nach wieviel Jahren sind die beiden Kapitalien zu gleichen Summen angewachsen?

Aufgabe 231. Nach wieviel Jahren wird ein Kapital von 1522 ℳ 50 ₰ zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehen, ebenso gross sein als ein Kapital von 2800 ℳ 40 ₰ zu $4\frac{3}{4}\%$ auf Zinseszinsen ausgeliehen?

Aufgabe 232. Ein Kapital von 20000 ℳ hat sich in 8 Jahren um 6849 ℳ und 12 ₰ vermehrt; in welcher Zeit wird es, zu demselben Zinsfuss von $3\frac{3}{4}\%$ ausgeliehen, sich verdoppeln?

Aufgabe 233. Wie lange muss ein Kapital von 26480 ℳ bei $3\frac{1}{2}\%$ stehen, wenn es zu derselben Summe anwachsen soll als ein Kapital von 17500 ℳ bei 5 % in 23 Jahren?

Aufgabe 234. Zwei Kapitalien sind auf Zinseszinsen ausgeliehen worden; das eine im Betrage von 38000 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$, das andere von 99400 ℳ zu $3\frac{1}{2}\%$. In wieviel Jahren werden sie zu demselben Betrage angewachsen sein?

Aufgabe 235. Wie lange haben zwei gleich grosse Kapitalien, das eine zu 5 %, das andere zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgestanden, wenn sie, nachdem das 2te 3 Jahre länger als das erste ausgestanden, zu gleicher Höhe angewachsen sind?

Aufgabe 236. Wenn 27450 ℳ auf Zinseszinsen 19 Jahre ausstehen und zu einer Summe von 63150 ℳ angewachsen sind, in welcher Zeit werden 45900 ℳ zu demselben Zinsfuss ausgeliehen einen Wert von 92780 ℳ erlangen?

Aufgabe 237. Auf einer Strasse kommen jährlich 80000 ℳ ein. Diese Einkünfte würden sich um 60 % vermehren, wenn eine Eisenbahn angelegt wäre. Der Bau derselben ist zu 2750000 ℳ veranschlagt. In wieviel Jahren werden die ganzen jährlichen Einnahmen die Kosten des Baues gedeckt haben, wenn beide Kapitalien zu $4\frac{1}{2}\%$ benutzt und Zinseszinsen berechnet werden?

Aufgabe 238. Zu wieviel % müssen 9200 ℳ ausgeliehen werden, um in 15 Jahren auf dieselbe Höhe anzuwachsen wie 15125 ℳ bei 3 % in 12 Jahren?

Aufgabe 239. Ein Kapital von 1000 ℳ wird auf 20 Jahre auf Zinseszinsen ausgeliehen. Nach Verlauf von 10 Jahren wird ein zweites Kapital von 1000 ℳ auf 10 Jahren zu demselben Zinsfuss ausgeliehen. Beide Kapitalien betragen mit ihren Zinseszinsen nach der abgelaufenen Frist zusammen 4000 ℳ Zu wieviel % sind die beiden Kapitalien ausgeliehen worden?

Aufgabe 240. Wie hoch müsste sich ein Kapital verzinsen, wenn es durch Zinseszinsen steigend, nach 8 Jahren so gross geworden

wäre, dass ihm nur noch der Betrag des Anfangskapitals fehlt, um das $2^1/_2$fache des Wertes zu erreichen, den es bereits nach 4 Jahren erlangt hatte?

Aufgabe 241. Zu wieviel $^0/_0$ ist ein Kapital von 27341 *M.* ausgeliehen, das in 8 Jahren mit seinem jährlichen Zins und Zinseszins zu einer ebenso grossen Summe anwächst, als ein Kapital von 20000 *M.* zu $4^1/_2\,^0/_0$ mit seinem halbjährlichen Zins und Zinseszins?

Aufgabe 242. Es hinterlässt jemand ein Vermögen von 100000 *M.* Davon sollen seine Kinder 10 Jahre hindurch jährlich 6810 *M.* haben. Dann sollen die Zinsen des noch vorhandenen Kapitals für die Schulen des Ortes verwendet werden. Wieviel macht das jährlich, $4^2/_3\,^0/_0$ gerechnet?

Andeutung. Man berechne die einfachen Zinsen des vorher zu berechnenden Endkapitals.

Aufgabe 243. Zu wieviel $^0/_0$ ist ein Kapital ausgeliehen, wenn es in 18 Jahren zu derselben Summe anwächst, als ein doppelt so grosses Kapital in 4 Jahren?

Aufgabe 244. Jemand hat das 20000 *M.* betragende Vermögen eines Verschollenen in sein Geschäft mit einem reinen Nutzen von jährlich $7^1/_4\,^0/_0$ Zinseszinsen umgesetzt. Nach 13 Jahren erschien der Totgeglaubte und empfängt sein Kapital mit $5\,^0/_0$ einfache Zinsen. Es wird gefragt:

a). welche Summe erhält der Totgeglaubte?
b). welche Summe gewann der erstere und
c). welche Summe erhält der Totgeglaubte, wenn dem Verschollenen $4\,^0/_0$ Zinseszinsen berechnet werden sollen?

Aufgabe 245. Ob man ein gewisses Kapital zu $4\,^0/_0$ 11 Jahre oder zu $5\,^0/_0$ 9 Jahre ausstehen hat, macht in den Endkapitalien einen Unterschied von 97 *M.* Wie gross war dasselbe?

Aufgabe 246. Zwei Kapitalien, von denen das eine 393 *M.* grösser ist als das andere, stehen auf Zinseszinsen, das kleinere zu $5^1/_4\,^0/_0$, das grössere zu $3^1/_4\,^0/_0$. Wie gross ist jedes, wenn in 40 Jahren das kleinere gerade doppelt so gross wird als das grössere?

Aufgabe 247. Zwei Kapitalien stehen zu $4^1/_4\,^0/_0$ auf Zinsen und geben nach 18 Jahren einen Unterschied von 15000 *M.* Wie gross ist jedes, wenn ihre Summe ursprünglich 25795 *M.* beträgt?

Aufgabe 248. Von einem Kapital, das zu $4\,^0/_0$ stand, gingen am Ende des 10. Jahres 14776 *M.* verloren. Wie gross war dasselbe ursprünglich, wenn es am Ende des 20. Jahres auf 73880 *M.* angewachsen war?

Aufgabe 249. Wie gross ist ein Kapital, das in $15\frac{1}{2}$ Jahren, halbjährig Zins auf Zins, zu $4\frac{1}{4}$ % ausgeliehen, sich um 12540 ℳ 5 ₰ vergrössert?

Aufgabe 250. Zwei Kapitalien, von denen das zweite doppelt so gross ist als das erste, aber 2 % niedriger steht, wachsen in $36\frac{1}{2}$ Jahren zu gleichen Summen an. Zu wieviel % steht jedes?

Aufgabe 251. Ein Kapital, das auf Zinseszinsen ausgeliehen war, hat sich in 12 Jahren verdoppelt; in welcher Zeit würde es sich verdoppelt haben, wenn die Zinsen $\frac{1}{2}$ % höher gewesen wären?

Aufgabe 252. Wie gross ist ein Kapital, das zu $3\frac{2}{3}$ % in 13 Jahren zu derselben Summe anwächst, als ein um 7000 ℳ grösseres Kapital in 9 Jahren, wenn bei ersterem die Zinsen jährlich, bei letzterem halbjährlich zum Kapital geschlagen werden?

Aufgabe 253. Wie gross ist ein Kapital, das zu $3\frac{2}{3}$ % jährlichen Zinseszinsen in 13 Jahren zu derselben Summe anwächst, wie ein um 7000 ℳ grösseres Kapital in 9 Jahren, das zu $3\frac{1}{2}$ % halbjährlichen Zinseszinsen aussteht?

Aufgabe 254. Es will jemand eine Summe Geldes 35 Jahre hindurch auf Zinsen geben, um sich nach Ablauf der Zeit durch die Zinsen des erlegten Kapitals eine gewisse Einnahme zu sichern. Er rechnet auf 5 %. Um den wievielten Teil muss er die Summe vermehren, wenn er nur $4\frac{1}{2}$ % erhalten kann?

Aufgabe 255. Zu wieviel % sind 15705 ℳ 21 ₰ ausgeliehen, wenn sie in 8 Jahren, halbjährlich Zins auf Zins, sich um 5024 ℳ 21 ₰ vermehrt haben?

Aufgabe 256. Wie lange müssen 8000 ℳ zu 5 % auf Zinseszinsen stehen, um ebensoviel zu werden als 5050 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % in 10 Jahren?

Aufgabe 257. Ein Kapital von 8000 ℳ stand zu 5 % eine gewisse Anzahl von Jahren auf Zinseszinsen und wurde dadurch um 10000 ℳ grösser als ein Kapital, welches man durch jährliche Anlegung von je 450 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % während derselben Zeit erlangt hat. Wie lange waren beide Kapitalien angelegt?

Aufgabe 258. Zwei Beamte *A* und *B* beziehen jährlich Gehalte von 2400 und 3000 ℳ. Wieviel grösser war die Gesamteinnahme des *B* als die des *A*, als sie 20 Jahre im Amte waren, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ % gerechnet?

Aufgabe 259. A bezieht jährlich einen Gehalt von 2700 ℳ, B von 3600 ℳ. Jeder gebraucht jährlich zu seinem Unterhalte 2100 ℳ. Wieviel mehr würde B nach 25 Jahren haben als A, wenn beide immer ihren Ueberschuss auf Zinsen geben würden, diese zu 5 % gerechnet?

Aufgabe 260. In wieviel Jahren verringert sich ein Kapital von 10456 ℳ bei $3\frac{1}{2}$ % Zinseszins und einer jährlichen Abzahlung von 1200 ℳ zu derselben Summe, zu welcher ein Kapital von 1456 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % einfachen Zinsen und einer ebenso zu verzinsenden Zuzahlung von 120 ℳ, die zu Anfang jedes neuen Jahres geleistet wird, bis zum Schlusse des 20. Jahres anwächst?

Aufgabe 261. Zu wieviel % müsste ein Kapital auf Zinseszins angelegt werden, wenn es nach $2n$ (= 20) Jahren so hoch anwachsen sollte, dass ihm nur noch der Betrag des Anfangskapitals fehlt, um das a (= 3) fache des Wertes zu erreichen, den es bereits nach n Jahren erlangt hatte?

Aufgabe 262. Jemand wendet in seinem Testamente einer milden Stiftung sein Vermögen von 60000 ℳ zu. Das Geld soll zu $3\frac{1}{2}$ % sicher und dauernd angelegt werden. Ein Mitglied aus einer entfernten Verwandtschaft soll 20 Jahre hindurch jährlich 700 ℳ erhalten, die Stiftung selbst 2000 ℳ; nach 20 Jahren sollen dieser alle Zinsen zufliessen, wieviel wird sie dann jährlich einnehmen?

Aufgabe 263. Es will jemand 20 Jahre lang zu Anfang eines jeden Jahres eine gleich grosse Summe anlegen. Das dadurch angesammelte Kapital soll später 10 Jahre lang ausstehen, um dasselbe zu einer solchen Höhe zu bringen, dass es, von jetzt an gerechnet, nach 30 Jahren einen Wert von 60000 ℳ hat. Wieviel muss, um diesen Zweck zu erreichen, die ersten Jahre hindurch zu Anfang eines jeden Jahres angelegt werden, wenn der Zinsfuss 4 % beträgt?

Aufgabe 264. Jemand hat eine Summe Geldes zu 3 % auf Zinseszinsen ausgeliehen und legt am Ende eines jeden Jahres den zehnten Teil dieser Summe zu. Nach wieviel Jahren wird sich auf diese Art das ursprüngliche Kapital verdoppelt haben?

Aufgabe 265. Wie gross ist ein Kapital, welches $15\frac{1}{2}$ Jahre auf Zinseszinsen so ausgestanden hat, dass es in dem ersten Jahre $3\frac{1}{3}$ %, dann aber halbjährliche Zinsen zu $3\frac{3}{4}$ % trug und sich dabei um 7470 ℳ vermehrt hatte?

Aufgabe 266. Ein Kapital von k ℳ ist zu p % Zinseszinsen ausgeliehen und wird jedes 2te Jahr am Anfange des 3., 5., 7., ... Jahres um r ℳ vermehrt; zu welcher Summe ist dasselbe bis zum Anfang des $2n$ten Jahres angewachsen?

Beispiel: $k = 4000$, $r = 400$,
$p = 4\frac{1}{2}$, $n = 6$.

Aufgabe 267. Welches Kapital wächst in 40 Jahren zu 90 000 ℳ an, wenn der Hauptzins zu 5 %, der Zinseszins aber zu $2\frac{1}{2}$ % berechnet wird?

Aufgabe 268. Ein Kapital von 2200,1 ℳ ist in 30 Jahren zu 7029,64 ℳ angewachsen. Zu wieviel % wurde dasselbe verzinst, wenn der Zinseszins zu $2\frac{1}{2}$ % berechnet wurde?

Aufgabe 269. Jemand verkauft eine Realität um 100 000 ℳ Nach dem Verkaufe erlegt der Käufer sogleich $35\frac{1}{2}$ % und es gestattet ihm der Verkäufer für den Rest eine Prolongation von 5 Jahren, nach deren Verlauf er 90 000 ℳ zu erlegen hat. Wie hoch wird der Prozentsatz unter Voraussetzung einer halbjährlichen Kapitalisierung der Zinsen angenommen?

β). Aufgaben über Ersparungen und Sparkassenrechnungen.

Aufgabe 270. Eine Sparkasse nimmt die Summe von 300 000 ℳ zu 4 % auf und leiht dieselbe zu 5 % mit vierteljährlicher Berechnung der Zinsen wieder aus. Welches ist ihr Gewinn nach 12 Jahren?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 24.

Aufgabe 271. Drei Brüder, von denen jetzt der älteste 18 Jahre, der mittlere 16 Jahre, der jüngste 13 Jahre alt ist, haben jeder im Alter von 10 Jahren ein Geschenk von 7500 ℳ erhalten, das zu $4\frac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen verwaltet wird. Sie sollen ein Geschäft gründen, sobald alle drei zusammen 50 000 ℳ besitzen. Wann wird das Geschäft eröffnet werden?

Aufgabe 272. A und B fangen zu gleicher Zeit an zu sparen. A hat sein Kapital von 7300 ℳ und schlägt die Zinsen fortwährend dazu, indess B gar kein Vermögen besitzt, aber von seinem Gehalt jährlich 900 ℳ zurücklegt und durch Zinseszinsen anwachsen lässt. In welcher Zeit werden bei 4 % beide gleich viel haben?

Aufgabe 273. Eine Sparkasse leiht von jemanden 10 000 ℳ zu $3\frac{1}{3}$ % und leiht dieses Kapital wieder zu $5\frac{2}{3}$ % aus. Wie hoch beläuft sich der Gewinn der Sparkasse zu Ende des 15. Jahres, wenn Zinseszinsen gerechnet werden?

Aufgabe 274. Es zahlt jemand 20 Jahre hindurch zu Anfang jeden Jahres 1012 ℳ bei einer Kasse ein, die $4^1/_2$ % rechnet. Wie gross ist sein Vermögen nach Ablauf der angegebenen Zeit, wenn am Ende jeden Jahres für die Verwaltung $^1/_2$ % abgezogen wird?

Aufgabe 275. A legt am Anfang jeden Jahres r ℳ auf Zinsen, B am Ende jeden Jahres, beide n Jahre hindurch. Wieviel hat nach n Jahren A mehr als B, und wie gross ist der Unterschied für 100 ℳ jährlich in 20 Jahren bei 4 %?

Aufgabe 276. Es hat jemand ein Vermögen von 2100 ℳ zu 4 % ausgeliehen und legt den Zins am Ende eines jeden Jahres in eine Sparkasse, welche 3 % Zinseszins berechnet. Am Ende des 4. Jahres nimmt er aus der Sparkasse 250 ℳ heraus, da er Gelegenheit hat, diese Summe zu 5 % auszuleihen, legt aber, wie bisher, den Zins des ursprünglichen Kapitals und der ausgeliehenen 250 ℳ jährlich in die Sparkasse. Welches ist der Stand seines Vermögens nach Verfluss von 20 Jahren?

γ). Aufgaben über Schuldentilgungen, Amortisationen, Abfindungen etc.

Aufgabe 277. Eine Summe von 6400 ℳ soll in 12 Jahren durch jährliche, sich gleich bleibende Zahlungen abgetragen werden, und zwar werden die Zinseszinsen in den ersten 6 Jahren mit 4 %, nachher mit 5 % berechnet. Wie gross ist die jährliche Zahlung?

Aufgabe 278. Eine Schuld soll in den ersten 12 Jahren mit $3^1/_2$ %, von da ab aber mit $4^1/_2$ % verzinst werden. Wenn nun von Anfang an jährlich 5 % des ursprünglichen Kapitals zur Zinszahlung und allmälichen Tilgung verwendet werden, in wieviel Jahren ist die ganze Schuld abgetragen?

Aufgabe 279. Eine Kreditanstalt verzinst Gelder, die sie selbst leiht, mit $p = 5^1/_2$ %. Wieviel % muss sie von ihren Schuldnern nehmen, damit diese ihre Schuld durch blosse Zinszahlung in $n = 35$ Jahren bei ihr tilgen können?

Aufgabe 280. Jemand soll 10 Jahre lang den 3ten Teil der Zinsen eines Kapitals von 25000 ℳ und in weiteren 10 Jahren den 5ten Teil der Zinsen dieses Kapitals abgeben. Mit welcher Summe kann er diese Verpflichtungen ablösen, die Zinsen zu 5 % gerechnet?

Aufgabe 281. Jemand ist verpflichtet, 7500 ℳ mit 4 % Zinseszinsen nach 8 Jahren zu bezahlen. Er will diese Schuld in 8 gleichen Quoten abtragen. Wie gross ist eine solche Quote, wenn sie am Ende eines jeden Jahres bezahlt wird?

Aufgabe 282. Eine Gemeinde hat 40000 *M.* aufgenommen und dafür ihren Wald verpfändet, der jährlich 2500 *M.* reinen Nutzen abwirft. Wie lange kann der Wald für das gegebene Kapital benutzt werden, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

Aufgabe 283. *A* schuldet dem *B* 1500 *M.* zu 4 % und tilgt diese Schuld dadurch, dass er dem *B* eine 4 Hektar grosse Wiese zur Benutzung überlässt. Wie lange kann *B* von diesem Rechte Gebrauch machen, wenn der Ertrag eines Hektars der Wiese zu 50 *M.* veranschlagt wird?

Aufgabe 284. Eine Summe von 6 Millionen Mark, zu 4 % ausgeliehen, soll dadurch getilgt werden, dass jährlich ausser den Zinsen noch $1\frac{1}{2}$ % des ganzen Kapitals zur Tilgung verwendet werden; wann wird die Schuld getilgt sein?

Aufgabe 285. Eine Schuld von 7500 *M.*, welche zu $4\frac{1}{2}$ % verzinst wird, soll durch 8 gleiche jährliche Zahlungen bei einer Bank getilgt werden. Welche Tilgungsquote ist jedesmal zu zahlen, wenn die Bank nur $3\frac{1}{2}$ % rechnet?

Aufgabe 286. Ein junger Mann, der 22 Jahre alt ist, schuldet 5400 *M.*, die er nicht im stande ist, zu bezahlen; er verspricht deshalb seinem Gläubiger, die Schuld nach 10 Jahren mit den Zinseszinsen zu 5 % abzutragen, da erhält er die Nachricht, dass er am Ende seines 32. Lebensjahres infolge eines Testaments eine bedeutende Summe zu beanspruchen hat, wenn er versichern kann, dass er seit einem Jahre niemanden etwas schuldig sei; wieviel wird er jährlich bei der Bank einzahlen müssen, um die Erbschaft antreten zu können, wenn er am Ende seines 22. Lebensjahres mit den Zahlungen anfängt und ihm 4 % Zinseszinsen berechnet werden?

Aufgabe 287. *B* hat sich 16000 *M.* geliehen, wieviel hat er dafür nach 12 Jahren zurückzuzahlen, wenn das Kapital zu 6 %, die jährlichen Zinsen aber nur mit 4 % weiter verzinst werden?

Aufgabe 288. Es nimmt jemand 20000 *M.* auf und verspricht diese Schuld in 15 Jahresterminen je am Ende des Jahres zu tilgen. Wieviel beträgt die jährliche Heimzahlung, wenn der Zinsfuss des Kapitals zu $4\frac{1}{2}$ %, der der Jahresbeträge aber nur zu $4\frac{1}{4}$ % berechnet wird?

δ). Aufgaben über Barwerte.

Aufgabe 289. Ist eine Unternehmung vorteilhaft, welche eine Vorauslage von 25 000 ℳ sogleich und während den nachfolgenden 6 Jahren, zu Anfang eines jeden Jahres einen Zuschuss von 5000 ℳ erfordert, wenn die Zinsen zu 5 % gerechnet werden und das vollendete Werk erst mit Anfang des 7. Jahres einen reinen jährlichen Nutzen von 3000 ℳ hoffen lässt?

Aufgabe 290. Ein Rentner beteiligte sich bei dem Bau einer Eisenbahn mit 10 Aktien à 300 ℳ und bezahlte am Ende eines jeden Jahres hindurch, 5 Jahre lang, 600 ℳ. Nach sieben Jahren war der Bau vollendet und der Staat zog nun die ganze Bahn gegen Rückerstattung der Herstellungskosten an sich. Welche Summe hat der Rentner verloren, wenn der Verzinsung $4^1/_4$ % zu Grunde gelegt wird?

Aufgabe 291. Für ein Gut bietet *A* 600 000 ℳ bar, *B* 696 000 ℳ nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Wer bot am meisten, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden, und wieviel bot derselbe mehr als der andere?

Aufgabe 292. Für ein Gut bot *A* 150 000 ℳ bar, *B* 185 000 ℳ nach 4 Jahren zahlbar, *C* 215 000 ℳ nach 7 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Wer bot am meisten, Zinseszinsen zu $5^1/_2$ % gerechnet, und wieviel bot derselbe mehr als jeder der beiden andern?

Aufgabe 293. Es kauft jemand ein Haus auf Abzahlung, indem er am Schlusse eines jeden Jahres 2200 ℳ zahlt. Nach 20 Jahren ist das Haus bezahlt. Wie theuer war das Haus, wenn der Verkäufer mit den jeweiligen Abschlagszahlungen zugleich $5^1/_2$ % Zinsen für die noch unbezahlte Schuld erhalten hatte?

Aufgabe 294. Bei einer Subhastation eines Hauses bietet jemand 27 000 ℳ bar, ein anderer dagegen 30 000 ℳ so, dass davon 6000 ℳ nach 1 Jahre, 9000 ℳ nach 2 Jahren, 15 000 ℳ nach 3 Jahren abgetragen, bis dahin aber nicht verzinst werden sollen. Welches Gebot ist höher und um wieviel, die Zinsen zu 5 % gerechnet?

Aufgabe 295. Bei einer exekutiven Feilbietung einer Liegenschaft bietet jemand 18 000 ℳ bar, ein anderer dagegen 20 000 ℳ so, dass davon 4000 ℳ nach einem Jahr, 6000 ℳ nach zwei und 10 000 ℳ nach drei Jahren abgetragen, bis dahin aber nicht verzinst werden sollen. Welches Angebot ist höher und um wieviel, die Zinsen zu 5 % gerechnet?

Aufgabe 296. Beim Verkaufe eines Anwesens bieten drei Käufer; der erste bietet 60 000 ℳ bar, der zweite will 30 000 ℳ bar und

am Ende jedes der nächsten 5 folgenden Jahre 6600 *M.* ohne Zinsen zahlen; der dritte will endlich 67000 *M.* nach drei Jahren ohne Zinsen zahlen. Welcher von den dreien hat das höchste Angebot gemacht, wenn die Zinsen zu 5 % gerechnet werden?

Aufgabe 297. Auf ein dem Verkaufe ausgesetztes Gut geschehen drei Gebote. *A* bietet eine, je am Ende eines jeden Jahres, während 15 Jahren zahlbare Summe von 3500 *M.*; *B* 15000 *M.* bar und während 12 Jahren eine je am Ende eines jeden Jahres zahlbare Summe von 2500 *M.*; *C* 30000 *M.* nach 6 Jahren, 5000 *M.* drei Jahre später und dann während 10 Jahren am Ende eines jeden Jahres 1500 *M.* Welches Gebot ist das vorteilhaftere und wieviel ist das Gebot eines jeden bar wert, wenn der Zins zu 4 % gerechnet wird?

ε). Aufgaben über Diskont- und Terminalrechnungen.

Aufgabe 298. Ein unverzinstes Kapital, am 1. Juni 1873 fällig, wird schon am 1. Januar 1867 bar mit 4112 *M.* und einem Abzug (Diskonto, Rabatt) von 600 *M.* gezahlt. Wieviel % Diskonto war bewilligt?

Aufgabe 299. Jemand hatte ein Gut gekauft und nach dem Kaufvertrage sogleich 48000 *M.*, dann nach 4 Jahren abermals 48000 *M.* und nach weiteren 4 Jahren den Rest im Betrage von 29740 *M.* zu zahlen, und zwar die beiden letzten Summen bis zu den Verfallsterminen unverzinslich. Er kommt mit dem Verkäufer überein, die Kaufsumme sofort gegen Skonto von $4\frac{1}{2}$ % zu entrichten. Wieviel wird er zahlen müssen?

Aufgabe 300. *A* hat *B* nach 6 Jahren 800 *M.* und nach weiteren 4 Jahren 600 *M.* zu zahlen. Wieviel hat er dem *B* bar zu entrichten, wenn dieser ihm $3\frac{1}{2}$ % Diskonto bewilligt?

Aufgabe 301. Es hat jemand eine Schuld von 3450 *M.* zu 5 % zu verzinsen. Nach drei Jahren zahlt er davon 840 *M.* und nach zwei weiteren Jahren 1020 *M.* ab. Wie gross ist der Rest der Schuld nach 8 Jahren von jetzt ab, wenn Zinsen und Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Aufgabe 302. *A* hat an *B* die Summe von 4875 *M.* nach 5 Jahren ohne Zinsen zu zahlen; wieviel kann *A* für diese Summe bar bezahlen, wenn 5 % jährlicher Diskont gerechnet wird, und zwar: a). bei einfachem Zins,
b). bei Zinseszinsen?

Aufgabe 303. Es hat jemand am Ende des 3., 5., 7. und 10. Jahres bezw. 200, 300, 400 und 700 *M.* zu zahlen, möchte aber die ganze Schuld auf einmal entrichten; nach wieviel Jahren muss dies geschehen, wenn 4 % Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

Aufgabe 304. Jemand hat 400 ℳ nach 3 Jahren, 300 ℳ nach 5 Jahren, 1800 ℳ nach 8 Jahren, 1800 ℳ nach 12 Jahren und 2000 ℳ nach 14 Jahren zu zahlen. Er wünscht aber den ganzen Betrag auf einmal zu entrichten; wann kann das geschehen, wenn $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

Aufgabe 305. *B* kann dem *A* eine unverzinsliche Schuldsumme von 80000 ℳ entweder in der Weise abtragen, dass er 15 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres die gleiche Summe bezahlt, oder $\frac{1}{2}$ jährlich gleichviel entrichtet. Welches ist für *B* die vorteilhaftere Art der Heimzahlung, wenn in beiden Fällen $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?

Aufgabe 306. *A* hat dem *B* während 20 Jahren am Ende eines jeden Jahres 150 ℳ zu entrichten. Nach Ablauf von 10 Jahren wünscht aber *A* den noch schuldenden Rest bar abzutragen; wieviel beträgt diese Barzahlung, wenn $3\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

ζ). Aufgaben aus der Forstwissenschaft.

Aufgabe 307. In wieviel Jahren wird sich bei einem jährlichen Zuwachs von 2 % der Bestand eines Waldes von 4250 cbm um 3000 cbm erhöhen?

Aufgabe 308. Ein Wald, dessen Bestand gegenwärtig auf 1800 cbm geschätzt ist, wird nach 11 Jahren haubar. Wieviel cbm werden in dieser Zeit noch zuwachsen, wenn man den jährlichen Zuwachs bei 50 cbm auf 1 cbm veranschlagen kann?

Aufgabe 309. Der Holzbestand eines Waldes wurde vor 16 Jahren zu 30800 cbm abgeschätzt. Wenn nun seither kein Holz geschlagen worden ist und der Wald durch einen gleichen jährlichen Schlag innerhalb 9 Jahren ganz abgetrieben werden soll, wieviel cbm beträgt alsdann der jährliche Hieb, wenn der Zuwachs zu $2\frac{1}{2}$ % angenommen wird und der 1. Hieb am Ende des 17. Jahres nach der Abschätzung geschieht?

η). Aufgaben über Stadt- und Landbevölkerungen.

Aufgabe 310. Die Bevölkerung einer Stadt, welche 32500 Einwohner zählte, hat in 24 Jahren um 33566 Seelen zugenommen. Wieviel beträgt der jährliche Zuwachs auf 100 Seelen?

Andeutung. Man beachte, dass $k = 32500 + 33566$ und der Zinsfuss p gesucht ist.

Aufgabe 311. Die Bevölkerung eines Landes betrug im Jahre 1800 = 8035620, im Jahre 1854 = 10248521 und im Jahre 1884 = 25440709 Seelen. Ist die Zunahme der Bevölkerung eine regelmässige oder nicht?

Andeutung. Man berechne für den Zeitraum von 1800 bis 1850 den Prozentsatz p und ebenso für den Zeitraum von 1850—1884, und untersuche ob man für p dieselben Werte erhält.

Aufgabe 312. Wenn die Bevölkerung eines Landes innerhalb 9 Jahren von 208700 auf 318500 Seelen angewachsen ist, wie stark wird die Bevölkerung, wenn sie in demselben Masse zunimmt, 20 Jahre später sein?

Andeutung. Man berechne zuerst p für den Zeitraum der ersten 9 Jahre, dann die Seelenzahl am Ende der weiteren 20 Jahre.

Aufgabe 313. Eine Stadt, welche gegenwärtig 80000 Einwohner zählt, hatte deren vor 20 Jahren nur 50225; nach wieviel Jahren, von jetzt ab gerechnet, wird bei gleichem Wachstum die Einwohnerzahl die Höhe von 200000 Seelen erreicht haben?

Aufgabe 314. Wie gross wird die Einwohnerzahl eines Staates, die jetzt 20000000 beträgt und vor 200 Jahren 8000000 betrug, nach 20 Jahren sein, wenn sie diese Zeit hindurch in derselben Weise zunimmt, aber jährlich 10000 Personen auswandern?

Aufgabe 315. Die Bevölkerung eines Staates beträgt 17 Millionen Einwohner und vermehrt sich so, dass sie sich in 192 Jahren verdoppeln würde; es wandern aber jährlich 20000 Menschen aus; wie gross wird der Bestand nach 36 Jahren sein?

Anhang.

1). Einige Aufgaben aus der Zinseszinsrechnung, gelöst durch Anwendung der Kettenbrüche.

Aufgabe 316. Zwei Kapitalien k und k_1, die bezw. zu 4 und 5 % stehen, wachsen in 10 Jahren zu gleichen Summen an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für k und k_1, dass die Rechnung wie in den Logarithmen bis auf 7 Dezimalstellen stimmt?

Hülfsrechnung 1.

$$log\left(\frac{1,04}{1,05}\right)^{10} = 10 \, . \left(log\, 1,04 - log\, 1,05\right)$$

Mit Benutzung der am Schlusse des Buches beigefügten Hülfstafel 2 erhält man:

$$\begin{array}{rl} log\, 1,04 = & \overset{(+1)}{0,01703333}\overset{(-1)\,*)}{93} \\ \text{und:} \quad -log\, 1,05 = & -0,0211892991 \\ \hline & 0,9958440402-1 \end{array}$$

Formel 1ª: $K = k\,.\,1,0p^n$

Auflösung. Das Kapital k, welches zu 4 % auf Zinseszinsen steht, wächst bis Ende des 10. Jahres, nach vorstehender Formel 1ª, an zu:

$$k\,.\,1,04^{10}$$

und das Kapital k_1, welches zu 5 % auf Zinseszinsen steht, wächst bis Ende des 10. Jahres an zu:

$$k_1\,.\,1,05^{10}$$

Da beide Kapitalien gleiche Endwerte haben sollen, so hat man die Relation:

$$k\,.\,1,04^{10} = k_1\,.\,1,05^{10}$$

und hieraus erhält man für das Verhältnis der gesuchten Kapitalien k_1 und k:

$$\frac{k_1}{k} = \frac{1,04^{10}}{1,05^{10}}$$

oder:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{k_1}{k} = \left(\frac{1,04}{1,05}\right)^{10}$$

$$\log\left(\frac{1{,}04}{1{,}05}\right)^{10} = \frac{0{,}9958440402-1}{.\,10} \atop 9{,}9584404020-10$$

$$\text{oder: } \log\left(\frac{1{,}04}{1{,}05}\right)^{10} = 0{,}9584404-1$$

```
4396
----
   8
 4,8
----
 3,2
 3,3
```

mithin ist:

$$\left(\frac{1{,}04}{1{,}05}\right)^{10} = 0{,}9087417$$

*). In Betreff der logarithmischen Berechnung siehe Kleyer's Lehrbuch der Logarithmen.

Erkl. 143. Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Kettenbruch verwandelt, indem man erst die Ganzen ausscheidet, dann so verfährt, als wolle man den grössten gemeinschaftlichen Teiler zwischen dem Zähler und Nenner jenes Bruches finden, indem nämlich die bei dieser Division erhaltenen Quotienten die Partialnenner des Kettenbruchs bilden.

Siehe hierüber Kleyer's Lehrbuch der Kettenbrüche und nachstehende Hülfsrechnung 2).

Hülfsrechnung 2.

```
9087417|10000000|1
         9087417
        --------------
         912583|9087417|9
                8213247
               --------------
                874170|912583|1
                       874170
                      --------------
                        38413|874170|22
                              768261
                             --------
                              105910
                               76826
                             --------
                               29084|38413|1
                                     29084
                                    --------
                                     9329|29084|3
                                          27987
                                         --------
                                          1097|9329|8
                                               8776
                                              ------
                                                553|1097|1
                                                     553
                                                    ------
                                                     544|553|1
                                                         544
                                                        -----
                                                           9|544|60
                                                             54
                                                            ----
                                                              4|9|2
                                                                8
                                                               ---
                                                                1|4|4
                                                                  4
                                                                 ---
                                                                  .
```

Nun berechne man den Wert von $\left(\frac{1{,}04}{1{,}05}\right)^{10}$ bis auf 7 Dezimalstellen genau.

Nach der Hülfsrechn. 1). erhält man:

2). . . . $\frac{k_1}{k} = 0{,}908747$

oder:

3). . . . $\frac{k_1}{k} = \frac{9087417}{10000000}$

Würde man hiernach

$k_1 = 9087417$ und

$k = 10000000$

setzen, so hätte man zwei Werte gefunden, die insofern der Aufgabe genügen, als bei Benutzung derselben die Rechnung bis auf 7 Dezimalstellen stimmen würde. Um nun auch die möglichst kleinsten Werte für k und k_1 zu finden, verwandle man den Quotienten: $\frac{9087417}{10000000}$ in einen Kettenbruch und bestimme die Näherungswerte desselben.

Nach den Erkl. 143—146 und umstehendem Schema erhält man für die Näherungswerte des betreffenden Quotienten:

$$\frac{1}{1},\ \frac{9}{10},\ \frac{10}{11},\ \frac{229}{252},\ \frac{239}{263},\ \frac{946}{1041},\ \frac{7807}{8591} \text{ u. s. f.}$$

Erkl. 144. Den Quotient:

$\frac{9087417}{10000000}$ in einen Kettenbruch verwandelt, gibt nach vorstehender Hülfsrechnung 2). und nach der Erkl. 143:

$$\frac{9087417}{10000000} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{60+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}}}}}}}}}$$

Erkl. 145. Der erste Näherungswert des in der Erkl. 144 aufgestellten Kettenbruchs ist $=$

$$\frac{1}{1} \text{ (oder } = 1)$$

Der 2. Näherungswert dieses Kettenbruchs ist $=$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{9}} \text{ oder } = \frac{1}{\frac{9}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{9+1}{9}} = \frac{1}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{10}$$

Zur Berechnung der folgenden Näherungswerte beachte man die Erkl. 146.

Erkl. 146. Man findet einen Näherungswert eines Kettenbruchs aus den beiden vorhergehenden Näherungswerten, indem man den Zähler und auch den Nenner des direkt vorhergehenden Näherungswertes je mit dem Partialnenner, mit welchem der zu berechnende Näherungswert abschliesst, multipliziert und zu dem ersten der erhaltenen Produkte den Zähler des vorvorhergehenden Näherungswertes, zu dem zweiten erhaltenen Produkte den Nenner des vorvorhergehenden Näherungswertes addiert, womit der Zähler, bezw. der Nenner des zu berechnenden Näherungswertes gefunden ist.

So ist z. B. der 3. Näherungswert im folgenden Schema $=$

$$\frac{1.9+1}{1.10+1} = \frac{10}{11}$$

der 4. Näherungswert alsdann $=$

$$\frac{22.10+9}{22.11+10} = \frac{229}{252} \text{ u. s. f.}$$

(Siehe Kleyer's Lehrbuch der Kettenbrüche.)

Untersucht man nun, welcher dieser Näherungswerte mit dem Quotienten: $\frac{9087417}{10000000}$ bis auf 7 Dezimalstellen übereinstimmt, was man dadurch bewerkstelligt, indem man sowohl die Näherungswerte, als auch den wahren Wert des Quotienten in Dezimalbrüche verwandelt, so findet man, dass der kleinste der Näherungswerte, welcher mit dem Quotienten: $\frac{9087417}{10000000}$ bis auf 7 Dezimalstellen übereinstimmt, der **6. Näherungswert**, nämlich: $\frac{946}{1041}$ ist.

Man hat somit als kleinstes Verhältnis der Kapitalien k und k_1:

$$\text{A)}. \ . \ . \ . \ \frac{k_1}{k} = \frac{946}{1041} \quad \text{(siehe auch Gleich. 3)}$$

und kann hiernach:

$$k_1 = 946 \text{ und}$$
$$k = 1041 \text{ setzen,}$$

womit die kleinsten ganzen Zahlen gefunden sind, welche für k_1 und k gesetzt der Aufgabe genügen.

Schema
zur Berechnung der Näherungswerte des in der Erkl. 144 aufgestellten Kettenbruchs.

Partialnenner											
1	9	1	22	1	3	8	1	1	60	2	4
$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{229}{252}$	$\frac{239}{263}$	$\frac{946}{1041}$	$\frac{7807}{8591}$	$\frac{8753}{9632}$	$\frac{16560}{18223}$	$\frac{1002353}{1097012}$	$\frac{2021266}{2212247}$	$\frac{9087417}{10000000}$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12. Näherungswert.

Aufgabe 317. Ein Kapital k wächst bei 3 % in 12 Jahren zur Summe K an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für k und K, damit die Rechnung in den Logarithmen bis auf 7 Dezimalstellen stimmt.

Andeutung. Man drücke das Verhältnis $k:K$ aus, berechne die Näherungswerte dieses Verhältnisses und untersuche, welches der kleinste dieser Näherungswerte ist, damit der in der Aufgabe gestellten Bedingung entsprochen wird. Im übrigen siehe man die gelöste Aufgabe 316.

Aufgabe 318. Ein Kapital k wächst bei $4\frac{1}{2}$ % in 10 Jahren zu der Summe K an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für k und K, damit die Rechnung in den Logarithmen bis auf 7 Dezimalstellen stimmt?

Aufgabe 319. Ein Kapital k wächst bei $3\frac{1}{3}$ % in 9 Jahren zu der Summe K an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für k und K, damit die Rechnung in den Logarithmen bis auf 7 Dezimalstellen stimmt?

Aufgabe 320. Zwei Kapitalien k und k_1, die zu 3, bezw. zu $4\frac{1}{2}$ % stehen, wachsen in 15 Jahren zu gleichen Summen an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für k und k_1, dass die Rechnung in den Logarithmen bis auf 7 Dezimalstellen stimmt?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 316.

Aufgabe 321. Zwei Kapitalien von derselben Höhe k stehen zu $2\frac{1}{4}$, bezw. zu $3\frac{1}{2}$ % und wachsen in 10 Jahren bezw. zu den Kapitalien K und K_1 an. Welches sind die kleinsten ganzen Zahlen für K und K_1, damit die Rechnung in den Logarithmen bis auf 7 Dezimalstellen stimmt?

Andeutung. Man berechne das Verhältnis $K:K_1$ und verfahre weiter wie in der Aufgabe 316 gezeigt wurde.

Aufgabe 322. Ein Kapital, welches zu $3\frac{1}{2}$ % n Jahre bezw. auf Zinseszinsen steht, wächst zu derselben Summe an als wenn jenes Kapital zu 4 % n_1 Jahre lang auf Zinseszinsen steht. Welches sind für n und n_1 die kleinsten ganzen Werte unter 100, damit die Rechnung mit 7stelligen Logarithmen möglichst genau stimmt?

Andeutung. Man drücke das Verhältnis $n:n_1$ aus etc.

2). Entwicklung der Diskontoformeln.

a). Entwicklung der Leibnitz'schen Diskontoformel.

Frage 17. Wie heisst die Formel mittelst welcher nach *Leibnitz*, nämlich unter Zugrundelegung der Zinseszinsrechnung, der Diskonto zu berechnen ist, der für Früherzahlung einer Schuld in Abzug gebracht werden kann?

Antwort. Bezeichnet man den sogenannten „zusammengesetzten“ Diskonto (oder das sogenannte zusammengesetzte Interusurium, siehe Erkl. 147), der von einer Summe (Schuld) K abgezogen werden darf, welche n Jahre früher gezahlt wird als sie fällig ist, mit D, den der Zinseszinsberechnung zu Grunde gelegten (üblichen) Zinsfuss mit p, so

heisst die Formel, mittelst welcher nach *Leibnitz* der Diskonto zu berechnen ist und deshalb auch die **Leibnitz'sche Diskontoformel** genannt werden kann:

Formel 23 $D = \frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1)$

Diese Formel kann man, wie folgt, herleiten.

Ist nach n Jahren eine Summe K ohne Zinsen zu zahlen und bezeichnet man den üblichen Zinsfuss mit p, so besteht nach der Zinseszinsformel 1ª zwischen jener Summe K, dem jetzigen oder baren Wert k dieser Summe, der Anzahl n der Jahre und dem Prozentsatz p, die Relation:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

und hieraus erhält man für den baren Wert der Summe K:

a). $k = \frac{K}{1{,}0p^n}$

Wird nun die Summe K n Jahre früher gezahlt, so kann ein Abzug gemacht werden, der gleich der Differenz der nach n Jahren ohne Zinsen zu zahlenden Schuld K und dem Barwert $\frac{K}{1{,}0p^n}$ dieser Schuld ist.

Man hat somit für die Höhe dieses Abzugs, bezw. zur Berechnung des zusammengesetzten Diskontos D, die Relation:

$$D = K - \frac{K}{1{,}0p^n}$$

und hieraus erhält man:

$$D = \frac{K \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n} - \frac{K}{1{,}0p^n} \quad \text{oder:}$$

$$D = \frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1)$$

und dies ist vorstehende zu beweisende Formel.

Erkl. 147. Im übrigen beachte man die früheren Erklärungen 29, 30 und 31, bezw. die Erkl. 12 in der 1. Auflage.

Erkl. 148. Im praktischen Leben kann man sich bei Diskontberechnungen nach nebenstehender Formel 23 mit Vorteil der am Schlusse dieses Buches beigefügten Hülfstafel I bedienen, in welcher eine Reihe der Werte für $1{,}0p^n$ und $\frac{1}{1{,}0p^n}$ berechnet sind.

b). Entwicklung der Hoffmann'schen Diskontoformel.

Frage 18. Wie heisst die Formel, mittelst welcher nach *Hoffmann*, nämlich unter Zugrundelegung der einfachen Zinsrechnung, der Diskonto zu berechnen ist, der für Früherzahlung einer Schuld in Abzug gebracht werden kann?

Antwort. Bezeichnet man den sogenannten „einfachen" Diskonto (oder das sogenannte einfache Interusurium, siehe Erkl. 147), der von einer Summe (Schuld) K abgezogen werden darf, welche n Jahre früher gezahlt wird als sie fällig ist, mit „d", den der einfachen Zinsberechnung zu Grunde gelegten (üblichen) Zinsfuss mit p, so heisst die Formel, mittelst welcher nach *Hoffmann*

der Diskonto zu berechnen ist und deshalb auch die **Hoffmann'sche Diskontoformel** genannt werden kann:

Formel 24 $d = \frac{K . n . 0{,}0p}{1 + n . 0{,}0p}$

Diese Formel kann, wie folgt, hergeleitet werden.

Die am Ende des n^{ten} Jahres ohne Zinsen zahlbare Schuld kann man sich entstanden denken durch ein auf einfache Zinsen ausgeliehenes Kapital k, das in den n Jahren mit seinen einfachen Zinsen zu p % bis zu jener Summe K angewachsen ist.

Erkl. 149.

100 ℳ	bringen bei p %	in 1 Jahr	p ℳ	Zinsen,	
100 „	„ „ „	„ 2 „	$= 2 . p$ ℳ	„	
100 „	„ „ „	„ 3 „	$= 3 . p$ „	„	
⋮	⋮	⋮	⋮		
100 „	bringen bei „ „	„ n „	$= n . p$ „	„	
1 „	bringt „ „ „	„ n „	$= \frac{n . p}{100}$ „	„	und
k „	bringen „ „ „	„ n „	$= \frac{n . p . k}{100}$ „	„	

Nach der Erkl. 149 hat man somit:

$$K = k + \frac{n . p}{100} \cdot k \quad \text{oder:}$$

$$K = k\,(1 + n . 0{,}0p)$$

und hieraus erhält man für den Barwert k der nach n Jahren ohne Zinsen zahlbaren Schuld, wenn nur einfache Zinsen in Rechnung kommen:

$$k = \frac{K}{1 + n . 0{,}0p}$$

Somit erhält man in analoger Weise, wie in voriger Antwort, für den einfachen Diskont d, die Relation:

$$d = K - \frac{K}{1 + n . 0{,}0p} \quad \text{oder:}$$

$$d = \frac{K(1 + n . 0{,}0p) - K}{1 + n . 0{,}0p} = \frac{K + K . n . 0{,}0p - K}{1 + n . 0{,}0p}$$

und

$$d = \frac{K . n . 0{,}0p}{1 + n . 0{,}0p}$$

nämlich vorstehende Formel.

c). Untersuchung, welches die mathematisch richtige Diskontoformel ist.

Frage 19. Welche von den in vorstehenden Antworten entwickelten Diskontoformeln ist die richtigere und wie wird die Aussage beweisen?

Antwort. Von den in vorstehenden Antworten entwickelten Diskontoformeln ist diejenige, welcher die Zinseszinsrechnung zu Grunde liegt, nämlich die *Leibnitz*'sche Diskontoformel:

Formel 23 $D = \frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1)$

die **mathematisch richtige.**

Diese Aussage kann wie folgt bewiesen werden.

Soll die *Leibnitz*'sche Diskontoformel, Formel 23, richtig sein, so muss der sich hieraus für D ergebende Wert offenbar gleich der Summe der baren Werte aller Jahreszinsen sein.

Erkl. 150. Für den baren Wert k eines Kapitals K, zahlbar nach n Jahren zu $p\,\%$, hat man unter Zugrundelegung der Zinseszinsrechnung, siehe Erkl. 29, bezw. Erkl. 11 der 1. Auflage, die Relation:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

Ist $K = K\,.\,0{,}0p$ und $n = 1$, so hat man hiernach für diesen Barwert:

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p}$$

Erkl. 151. Die Reihe:

$$1 + \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}$$

ist eine geometrische, deren Summe man nach der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \text{ (siehe Erkl. 41 der 2. Auflage)}$$

bestimmen kann, wenn man in derselben:

für das Anfangsglied $a = 1$

„ den Quotienten $q = \frac{1}{1{,}0p}$ und

„ das letzte Glied $t = \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}$

setzt. Man erhält alsdann für die Summe s:

$$s = \frac{\frac{1}{1{,}0p^{n-1}} \cdot \frac{1}{1{,}0p} - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1} \text{ oder:}$$

$$s = \frac{\frac{1}{1{,}0p^n} - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1}$$

$$s = \frac{\frac{1 - 1{,}0p^n}{1{,}0p^n}}{\frac{1 - 1{,}0p}{1{,}0p}}$$

$$s = \frac{(1 - 1{,}0p^n)\,.\,1{,}0p}{1{,}0p^n\,(1 - 1{,}0p)}$$

oder Zähler und Nenner mit -1 multipliziert:

$$s = \frac{(1{,}0p^n - 1)\,.\,1{,}0p}{1{,}0p^n\,.\,(1{,}0p - 1)}$$

$$s = \frac{(1{,}0p^n - 1)\,.\,1{,}0p}{1{,}0p^n\,.\,0{,}0p}$$

Da nun der jährliche Zins eines Kapitals K zu $p\,\% = \frac{K\,.\,p}{100}$ oder $= K\,.\,0{,}0p$ ist, so erhält man nach der Erkl. 150 für den baren Wert der Jahreszinsen des ersten Jahres:

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p}$$

Da ferner der jährliche Zins des Kapitals K zu $p\,\%$ auch während des 2. Jahres, wie vorhin, $= K\,.\,0{,}0p$ ist, so erhält man nach der Erkl. 150 für den baren Wert der Jahreszinsen des 2. Jahres:

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^2}$$

In analoger Weise erhält man für die baren Werte der Jahreszinsen des 3., 4., ... n^{ten} Jahres, bezw.

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^3},\ \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^4},\ \ldots\ \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^n}$$

Wie vorhin erwähnt, muss also, wenn wie behauptet, die *Leibnitz*'sche Diskontoformel richtig sein soll:

$$1).\ \frac{K}{1{,}0p^n}(1{,}0p^n - 1) = \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p} + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^2} + \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p^n} \text{ sein.}$$

Um dies untersuchen zu können, muss man die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung bestimmen; man erhält für diese Seite:

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p}\left(1 + \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$

oder nach der Erkl. 151:

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p} \cdot \frac{(1{,}0p^n - 1)\,.\,1{,}0p}{1{,}0p^n\,.\,0{,}0p} \text{ oder:}$$

$$\frac{K}{1{,}0p^n}\left(1{,}0p^n - 1\right)$$

nämlich denselben Wert, wie auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung 1).

Soll ferner die *Hoffmann*'sche Diskontoformel

$$d = \frac{K\,.\,n\,.\,0{,}0p}{1 + n\,.\,0{,}0p}$$

richtig sein, so muss auch hier der sich aus dieser Formel für d ergebende Wert offenbar gleich der Summe der baren Werte aller Jahreszinsen sein.

Wie vorhin erhält man nach der Erkl. 150 für den baren Wert der einfachen Jahreszinsen $K\,.\,0{,}0p$ des ersten Jahres:

$$\frac{K\,.\,0{,}0p}{1{,}0p} \text{ oder: } \frac{K\,.\,0{,}0p}{1 + 0{,}0p}$$

Erkl. 152. Steht ein Kapital k zu p % n Jahre lang aus, so wächst es mit seinen einfachen Zinsen an zu:

$$1). \quad K = k \cdot \frac{100 + n \cdot p}{100} \quad \text{(siehe Erkl. 153)}$$

Analog der Erkl. 29, bezw. der Erkl. 11 der 1. Auflage, gibt sich hieraus für den baren Wert k eines nach n Jahren zu p % einfachen Zinsen verzinsten Kapitals K:

$$k = \frac{K}{\frac{100 + n.p}{100}}$$

$$k = \frac{K}{1 + n \cdot \frac{p}{100}}$$

oder:

$$2). \quad k = \frac{K}{1 + n \,.\, 0{,}0p}$$

Ist $K = K.0{,}0p$ und $n = 1$, so erhält man für den Barwert dieses Kapitals:

$$\frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 0{,}0p}$$

Ist ferner $K = K.0{,}0p$ und $n = 2$, so erhält man für den Barwert dieses Kapitals:

$$\frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 2 \,.\, 0{,}0p} \quad \text{u. s. f.}$$

Erkl. 153.
100 M. wachs. bei p% nach 1 Jahr an zu $100 + p$
ferner hat man bei einfacher Zinsberechnung:
100 M. wachs. bei p% in 2 Jahren an zu $100 + 2p$
" " " " p% " 3 " " " $100 + 3p$
⋮
100 " " " p% " n " " " $100 + n.p$
mithin wächst:
1 M. bei p% in n Jahren an zu $\frac{100 + n.p}{100}$
und sonach wachsen
k M. bei p% in n Jahren an zu $\frac{100 + n.p}{100} \cdot k$
Bezeichnet man diesen Endwert mit K, so hat man die einfache Zinsformel:

$$K = k \cdot \frac{100 + n \,.\, p}{100}$$

In analoger Weise erhält man für die baren Werte der einfachen Jahreszinsen: $K.0{,}0p$ des 2., 3., . . . n^{ten} Jahres, bezw.

$$\frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 2 \,.\, 0{,}0p}, \quad \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 3 \,.\, 0{,}0p}, \ldots\ldots$$

$$\frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + n \,.\, 0{,}0p}$$

Wie vorhin muss also, wenn die *Hoffmann*sche Diskontoformel richtig sein soll:

$$\frac{K \,.\, n \,.\, 0{,}0p}{1 + n \,.\, 0{,}0p} = \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 0{,}0p} + \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 2 \,.\, 0{,}0p} + \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + 3 \,.\, 0{,}0p} + \ldots \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 + n \,.\, 0{,}0p}$$

sein.

Zur Untersuchung, ob dieses der Fall ist, reduziere man die Gleichung. Man erhält:

$$2). \quad \frac{n}{1 + n \,.\, 0{,}0p} = \frac{1}{1 + 0{,}0p} + \frac{1}{1 + 2 \,.\, 0{,}0p} + \frac{1}{1 + 3 \,.\, 0{,}0p} + \ldots \frac{1}{1 + n \,.\, 0{,}0p}$$

Aus dieser Gleichung ersieht man sofort, dass jeder der Summanden rechts grösser als jeder der demselben folgenden ist, dass ferner n solcher Summanden vorhanden sind und dass das n-fache des letzten, des kleinsten dieser Summanden, nämlich:

$$n \cdot \frac{1}{1 + n \,.\, 0{,}0p}$$

schon gleich der linken Seite dieser Gleichung 2). ist, somit muss offenbar die ganze rechte Seite der Gleich. 2). grösser als die linke Seite derselben sein, womit bewiesen ist, dass diese Gleichung nicht stattfinden kann, **dass also die Hoffmann'sche Diskontoformel unrichtig ist und deshalb bei entsprechenden Aufgaben nicht angewandt werden soll.**

II. Teil.

Die Rentenrechnung.

Die Rentenrechnung.

A. Ueber die Renten und die Rentenrechnung im allgemeinen.

Frage 20. Was versteht man unter „Rente“ im allgemeinen?

Antwort. Unter Rente (ital. *rêndita*) versteht man im allgemeinen jede Geld- oder sonstige Einnahme, welche aus speziell zu diesem Zwecke (siehe Antwort der Frage 22) angelegten Geldkapitalien oder aus andern Dingen, als z. B. aus Staatspapieren, Aktien, Grundstücken, Häusern etc. fliesst; sowie auch solche durch Verträge, Gesetze, sogenannte Gerechtsame, etc. gesicherten Einnahmen, als Pensionen, Steuern, Zehntabgaben etc., welche in bestimmten Terminen (Zeitabschnitten, siehe Erkl. 154) fortlaufend oder bis zu einem gewissen Zeitpunkte zahlbar sind.

(Siehe die Erkl. 155—158.)

Erkl. 154. Das Wort „Termin“ kommt von dem lateinischen Worte *terminus*, welches Grenzzeichen, Ende oder Schluss heisst. In der Rechtssprache wird das Wort Termin in der Bedeutung von „Frist“, bezw. in der Bedeutung eines festgesetzten Zeitabschnitts gebraucht.

Erkl. 155. Unter „Staatspapieren“ versteht man im allgemeinen Schuldscheine, welche von einem Staate für ein aufgenommenes Anlehen ausgestellt werden. Je nach den auf solchen Schuldscheinen vermerkten Angaben über die Art der Verzinsung, über die Art der Rückzahlung, über die Art der Garantie, welche der Staat bietet, etc., unterscheidet man verschiedene Arten von Staatspapieren.

Wird z. B. gesagt, dass die von einem Staate aufgenommene Schuld niemals getilgt wird, dass also das geliehene Kapital niemals zurückgefordert werden kann *)., und dass der Staat in gewissen Zeiträumen nur die nach einem bestimmten Zinsfuss festgestellten Zinsen bezahlt, so nennt man diese Zinsen, bezw. die betreff. Staatspapiere „Staatsrenten.“

In betreff der Benennung und Berechnung von Staatspapieren findet man ausführliches in Kleyers Lehrbücher des kaufmänn. Rechnens.

*). Bei den Staatsrenten kann, wie erwähnt, vom Gläubiger das Kapital selbst niemals zurückgefordert werden, wohl aber behält sich meistens der Staat (der Schuldner) das Recht vor, die betreff. Schuld tilgen zu können. Dies hat den Zweck, um nötigenfalls, wenn der Wert des Geldes also auch der Zinsfuss sinkt, keine zu hohen Zinsen bezahlen zu müssen, indem ihm dadurch die Möglichkeit gegeben ist, den festgestellten Zinsfuss herabsetzen (die Staatsrenten zu konvertieren, umzuwandeln), bezw. eine andere Anlehe aufnehmen zu können, welcher ein niedrigerer Zinsfuss bei Berechnung der Zinsen zu Grunde gelegt wird.

Erkl. 156. Unter „Aktie“ (holländ. *actie*, aus dem französ. Wort *action* abgeleitet) versteht man einen Anteil von einer sogenannten Aktiengesellschaft, welche sich zum Zwecke technischer, merkantiler, ökonomischer etc. Unternehmungen gebildet hat, dabei (hier abgesehen von gemeinnützigen Zwecken) einen Gewinn erzielen will. Je nach den Unternehmungen, welche die betreffende Gesellschaft macht, unterscheidet man verschiedene Arten von Aktien.

Ausführliches über Aktien etc. findet man in Kleyers Lehrbücher des kaufmännischen Rechnens.

Erkl. 157. Die Einnahmen, welche aus Grundstücken, Häusern etc. fliessen, bezeichnet man mit dem speziellen Namen: „Pacht- oder Mietzins.“

Erkl. 158. Die Einnahmen, welche jemandem (meist einer Gemeinde oder einem Staate) infolge gewisser sogen. Gerechtsame (Servitute) auf Häuser, Grundstücke etc. in bestimmten Zeitabschnitten zufliessen, wie z. B. die Zehntabgaben etc., nennt man: auf jenen Häusern, Grundstücken etc. ruhende Reallasten oder kurzweg Lasten.

Derartige auf Grundstücken etc. ruhende Lasten (oder auch Servituten genannt) kommen jetzt nur noch selten vor, indem die meisten derartigen Lasten (Abgabe von Grundzinsen) abgelöst werden (Ablösungsrechnung), zu welchem Zwecke die einzelnen Staatsregierungen die Errichtung der Grundrentenbanken unterstützt haben.

Frage 21. Wie werden die bei einer Rente an den einzelnen Terminen stattfindenden Einnahmen benannt?

Antwort. Bei einer Rente werden die an den einzelnen Terminen stattfindenden Einnahmen „Rentenbezüge“, „Raten“ (siehe Erkl. 159) oder auch selbst „Renten“ genannt, so sagt man z. B. eine Rente von 600 Mark, wobei man unter den 600 Mark einen Rentenbezug, eine Rate jener Rente zu verstehen hat.

Erkl. 159. Das Wort „Rate“ ist ein lateinisches Wort und heisst: verhältnismässiger Beitrag oder Anteil, und auch „die berechnete“ (nämlich die berechnete Summe). Gewöhnlich versteht man unter Rate eine Raten- oder Teilzahlung.

Frage 22. Was versteht man unter Rente im engeren Sinne?

Antwort. Unter Rente im engeren Sinne versteht man einen Geldbetrag, welcher jemandem in gewissen, meist in gleichen, oft auch in periodisch wiederkehrenden Terminen, infolge irgend einer Gegenleistung ausgezahlt wird.

Frage 23. Welche besondere Benennungen finden in bezug auf diejenige Person statt, welche eine Rente empfängt (bezieht) und auf diejenige Person, welche eine Rente auszahlt?

Antwort. Diejenige Person, welche eine Rente empfängt (bezieht) und unter welcher man sich auch mehrere Personen vereint denken kann, nennt man den Besitzer der Rente oder auch Rentier, Rentner, Rentierer, Rentenierer.

Diejenige Person, welche eine Rente auszuzahlen hat und unter welcher man sich fast ausschliesslich eine Verbindung von Personen, eine Gesellschaft, zu denken hat, nennt man Rentengeber, Entrepreneur (Unternehmer), bezw. Rentenbank.

Frage 24. Wie werden die Renten eingeteilt und zwar in bezug auf die Dauer der einzelnen Termine, an welchen die Raten derselben fällig sind, d. h. zur Auszahlung kommen müssen?

Erkl. 160. Das Wort „Annuität“ ist ein lateinisches Wort. Unter demselben versteht man im allgemeinen eine vereinbarte jährliche Zahlung.

Ueber die Bedeutung des Wortes „Annuitäten“ bei Börsenpapieren siehe Kleyers Lehrbücher des kaufmännischen Rechnens.

Antwort. Die Renten werden je nach der Dauer der einzelnen Termine, an welchen die Raten derselben fällig sind, eingeteilt in:

jährliche, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$, 2, 3, . . . jährliche Renten.

Die jährlichen Renten, welche am häufigsten vorkommen, werden auch „Jahresrenten oder Annuitäten“ genannt.

Frage 25. Wie werden die Renten eingeteilt und zwar in bezug darauf, ob die Raten am Anfange oder am Ende der einzelnen Termine fällig sind?

Antwort. Je nachdem die Raten einer Rente am Anfange oder am Ende der einzelnen Termine fällig sind, werden die Raten eingeteilt in vorschüssige und in nachschüssige Renten.

Frage 26. Was versteht man unter einer sogenannten aufgeschobenen Rente?

Antwort. Unter einer sogenannten aufgeschobenen Rente versteht man eine solche, deren Raten erst von einem gewissen Zeitpunkte ab fällig sind.

Frage 27. Wie werden die Renten eingeteilt und zwar in bezug darauf, ob die Raten unveränderlich (konstant) oder veränderlich (variabel) sind?

Antwort. Je nachdem die Raten einer Rente unveränderlich (konstant) oder veränderlich (variabel) sind, d. h. je nachdem der Betrag der einzelnen Raten derselbe bleibt oder nach irgend einem Gesetze fällt oder steigt, teilt man die Renten bezw. ein in unveränderliche und veränderliche Renten.

Frage 28. Wie werden die Renten eingeteilt und zwar in bezug auf die Dauer der Rente selbst?

Erkl. 161. Da die Raten der Zeitrenten und der Leibrenten meist in jährlichen Terminen fällig sind und da ausserdem diese Art Renten am häufigsten im praktischen Leben vorkommen, so werden die Zeit- und die Leibrenten auch oft Jahresrenten oder Annuitäten genannt (siehe Erkl. 160), was jedoch den allgemeinen Definitionen in keiner Weise entspricht und deshalb verwerflich ist.

Antwort. In bezug auf die Dauer einer Rente, nämlich je nachdem eine solche nur eine ganz bestimmte Zeit lang oder während der Lebensdauer des Rentenempfängers, also bis zu dessen Tode, oder immerwährend, also ewig ausgezahlt wird, teilt man die Renten bezw. ein in sogenannte „Zeitrenten“ (oder Annuitäten, siehe Erkl. 161), in sogen. „Lebens-, Leib- oder Altersrenten“ und in sogen. „Immerwährende oder ewige Renten“.

Frage 29. Wie werden die Leibrenten eingeteilt und zwar in bezug darauf, ob die Auszahlung nur an eine oder an mehrere Personen erfolgt?

Erkl. 162. Ausführliches über die Leibrenten findet man in Kleyers Lehrbüchern über die Rechnungsarten, welche sich auf die menschliche Sterblichkeit gründen (siehe Antwort der Frage 35), welche z. B. die Berechnung
der Aussteuerversicherungsanlage,
„ Einlagen bei Kinderversorgungskassen,
„ Leibrenten (sogleich beginnende, aufgeschobene, temporäre Leibrenten),
die Berechnung der Verbindungsrenten (auf das kürzeste und das längste Leben), die Berechnung der Ueberlebungsrenten (Waisenpensionen etc.), die Berechnung der Lebensversicherungen etc. etc. behandeln.

Antwort. Hängt die Auszahlung einer Rente von der Lebensdauer einer Person ab, so heisst sie kurzweg „Leibrente“; hängt die Auszahlung einer Rente von der Dauer der Zeit ab, während welcher zwei oder mehrere Personen zusammen leben, so heisst sie „Verbindungsrente“; hängt schliesslich die Auszahlung einer Rente von der Lebensdauer einer Gesellschaft, nämlich von der Lebensdauer der zuletzt verstorbenen Person dieser Gesellschaft ab, so heisst sie „Gesellschaftsrente oder Tontine“.

Frage 30. Worin besteht die Gegenleistung, welche der Rentenempfänger dem Rentengeber zu leisten hat, und welchen besonderen Namen führt dieselbe?

Erkl. 163. Das Wort „Mise“ ist ein französisches Wort und heisst: Ausgabe, Einsatz beim Spiel, Einlage bei Handelsgeschäften, Angebot etc.

Erkl. 164. Stirbt der Rentenempfänger vor dem Bezug der ganzen Rente, so ist der Rentengeber verbunden, die Renten bis zur Verfallzeit derselben an die Erben des Verstorbenen zu entrichten.

Antwort. Die Gegenleistung, welche der Rentenempfänger dem Rentengeber zu leisten hat (siehe Antw. der Frage 23), besteht gewöhnlich in einer auf irgend eine Weise zu zahlenden Summe Geldes.

Die Gegenleistung kann jedoch auch aus anderen Dingen, z. B. in der Ueberlassung von Grundstücken, Häusern etc. (siehe Antwort der Frage 20) bestehen; der Wert der Nutzniessung solcher Dinge wird jedoch stets durch eine Summe Geldes ausgedrückt.

Diese Gegenleistung führt den besonderen Namen „Mise“ (siehe Erkl. 163).

Frage 31. Welche Beziehung muss zwischen einer Rente und der gemachten Gegenleistung bestehen?

Erkl. 165. Die Mise muss so gross sein, dass sie bis zu jenem bestimmten Zeitpunkte, samt ihren Zinsen und Zinseszinsen zu p %, gleich der Summe der Raten samt ihren Zinsen und Zinseszinsen, ebenfalls zu p % bis zu jenem Zeitpunkte ist.

Erkl. 166. Durch die einzelnen Rentenbezüge müssen nicht allein die Zinsen und Zinseszinsen der Mise ausgeglichen werden, sondern es muss diese Mise selbst bis zum Schluss der Rente abgetragen sein.

Antwort. Zwischen einer Rente und der gemachten Gegenleistung, der Mise, muss die Beziehung bestehen, dass die beiden Geldleistungen bis zu einem gewissen Zeitpunkte, unter Zugrundelegung der Zinseszinsrechnung, gleiche Werte haben (siehe Erkl. 165).

Gewöhnlich nimmt man als jenen bestimmten Zeitpunkt die Zeit an, von welcher ab das gegenseitige Rechtsverhältnis zwischen Rentengeber und Rentenempfänger in Kraft tritt; somit gründet sich das gegenseitige Rechtsverhältnis, in welchem der Rentenem-

Erkl. 167. Unter dem „baren Wert oder dem Barwert“ einer nach einer gewissen Zeit ohne Zinsen zahlbaren Summe Geldes, versteht man diejenige Summe Geldes, welche sofort zu dem festgesetzten Zinsfuss auf Zinseszinsen angelegt, bis nach Ablauf jener gewissen Zeit zu jener zahlbaren Summe Geldes angewachsen ist (siehe die Erkl. 29, Seite 10, bezw. die Erkl. 11 der 1. Auflage).

Erkl. 168. Da der bare Wert der Rente gleich dem Barwerte der Mise sein muss, so bezeichnet man auch oft den baren Wert der Rente mit dem Namen „Mise“.

pfänger als Gläubiger, der Rentengeber als Schuldner bezeichnet wird, darauf, dass die sogenannten Barwerte (siehe Erkl. 167) der gegenseitigen Leistungen einander gleich sind.

Frage 32. Was versteht man unter dem baren Wert oder dem Barwert einer Rente?

Erkl. 169. Das Aufsuchen des Barwertes (der Mise) einer Rente nennt man „die Kapitalisierung der Rente“.

Antwort. Unter dem Barwert einer Rente (auch Mise genannt, siehe Erkl. 168) versteht man die Summe Geldes, welche bei Beginn des gegenseitigen Rechtsverhältnisses gleich der Summe der baren Werte der einzelnen Rentenbezüge (Raten) ist. (Siehe Erkl. 169.)

Frage 33. Was versteht man unter der Rentenrechnung im allgemeinen Sinne?

Antwort. Unter der Rentenrechnung im allgemeinen Sinne versteht man die Vornahme derjenigen Operationen, welche nötig sind, wenn von den 4 wesentlichen Grössen, die bei den Renten in Betracht kommen: Mise, Rate (Rente), Zeit und Zinsfuss drei derselben gegeben sind, die vierte aber gesucht ist.

Frage 34. Bei welchen Berechnungen kommt die Rentenrechnung in Anwendung?

Erkl. 170. Die vielfache Anwendung, welche die Rentenrechnung findet, ergibt sich am besten aus der Durchsicht der späteren Aufgaben und aus der Erkl. 162.

Antwort. Die Rentenrechnung kommt, wie die Zinseszinsrechnung, ausser in finanziellen und merkantilischen, auch in ökonomischen Fächern in Anwendung.

Besondere Anwendung findet die Rentenrechnung im ganzen Versicherungswesen, als bei: Feuer-, Glas-, Hagel-, Vieh-, Hypotheken-, See-, Transport-, Unfall-, Lebens-, Renten-, Rückversicherungen etc., bei den sogenannten Ablösungsrechnungen (siehe Erkl. 158) etc. etc.

Frage 35. Worauf gründet sich die Berechnung der sogen. Leibrenten?

Antwort. Die Berechnung der Leib- oder Lebensrenten gründet sich auf die

Erkl. 171. Die Leibrenten kommen meistens in den Fällen in Betracht, in welchen jemand sich selbst oder einem Dritten eine dauernde Einnahme sichern will; infolgedessen haben sie in der Jetztzeit eine hohe Bedeutung gewonnen.

wahrscheinliche Lebensdauer des Rentenempfängers, welche im allgemeinen mittels der durch die Erfahrung aufgestellten Sterblichkeits- oder Mortalitätstabellen festgestellt wird, und werden derartige Berechnungen im weiteren nach den allgemeinen Regeln und Formeln der Renten- und Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeführt.

B. Ueber die Berechnung der Zeitrenten.

1). Entwicklung der Rentenformeln für eine nachschüssige Jahresrente.

Anmerkung 8. In betreff der Hinweise auf Formeln der Zinseszins- und Rentenrechnung beachte man das am Schlusse des Buches beigefügte Formelnverzeichnis.

Frage 36. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Werts einer nachschüssigen Jahresrente, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise, siehe Erkl. 168) einer nachschüssigen Jahresrente (Annuität) mit w, die jährlichen Raten oder Rentenbezüge mit r, die Anzahl der Jahre, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die betreffende Rentenformel:

Formel 25 $$w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q, d. i. der Wert der Geldeinheit bei p % nach Ablauf eines Jahres, einführt (siehe Antw. der Frage 5, bezw. der Frage 4 der 1. Auflage), d. h.:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100} = q \quad \text{und}$$

$$0{,}0p = 1{,}0p - 1 = q - 1 \quad \text{setzt:}$$

Formel 25ª. $$w = \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{(q-1) \,.\, q^n}$$

Diese Formeln können auf folgende Weise hergeleitet werden:

Der Barwert der Rente ist, siehe Antwort der Frage 32, gleich der Summe der Barwerte der einzelnen Rentenbezüge r. Berücksichtigt man nun, dass nach der Erkl. 167 und nach der in der Erkl. 29, Seite 10 (bezw. der Erkl. 11 der 1. Auflage) aufgestellten Formel, wenn man in derselben statt $1{,}0p$ den Buchstaben q einführt, der bare Wert der am Ende des 1. Jahres zahlbaren Rate $r = \frac{r}{q}$, der bare Wert der am Ende des 2. Jahres zahlbaren Rate $r = \frac{r}{q^2}$, der bare Wert der am Ende

Erkl. 172. Nebenstehende Formel 25 hätte man auch wie folgt ableiten können:

Wird der bare Wert w n Jahre lang zu p % auf Zinseszinsen gegeben, so muss er offenbar zu derselben Summe anwachsen, als die am Ende des 1., 2., 3., ... n^{ten} Jahres fälligen Rentenbezüge r bis zu Ende jenes n^{ten} Jahres mit ihren Zinsen und Zinseszinsen ebenfalls zu p %.

Mit Benutzung der im 1. Teil entwickelten Zinseszinsformeln 1ᵇ u. 5ª (siehe obige Anm. 8).:

1). . . . $K = k \,.\, q^n$ und

2). . . . $K = \dfrac{r \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$

hat man somit die Relation:

a). . . . $w \cdot q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$

woraus man

b). . . . $w = \frac{r(q^n - 1)}{(q-1) \cdot q^n}$

nämlich umstehende Formel 25ᵃ erhält (siehe Erkl. 56, Seite 29, in der 2. Auflage).

Erkl. 173. Umstehende Formel 25 hätte man noch auf eine andere Weise ableiten können.

Denkt man sich den baren Wert w der Rente zu p % während der n Jahre als die Rente dauert auf Zinseszinsen angelegt und am Ende eines jeden Jahres eine Summe, welche gleich der Rate r ist, weggenommen, so muss der künftige oder Endwert K jener Summe w bis Ende des n^{ten} Jahres $= 0$ sein.

Mit Benutzung der im 1. Teil entwickelten Formel 6ᵃ (siehe vorstehende Anmerk. 8):

$$K = k \cdot q^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

erhält man somit, wenn $K = 0$ und $k = w$ gesetzt wird:

a). . . $0 = w \cdot q^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$

und hieraus erhält man:

b). . . $w = \frac{r(q^n - 1)}{(q - 1) \cdot q^n}$

nämlich wiederum umstehende Formel 25ᵃ.

Erkl. 174. In umstehender Formel 25 können drei der Grössen: w, r, p und n gegeben, die vierte Grösse gesucht sein; somit können mittelst dieser Formel folgende 4 Fragen durch Rechnung gelöst werden:

a). Welches ist der bare Wert (die Mise, siehe Erkl. 168) einer nachschüssigen Jahresrente r, welche n Jahre fällig ist und welcher der Zinsfuss p % zu Grunde liegt? (siehe folgende Aufgabe 323);

b). Wie gross ist die am Ende eines jeden Jahres, n Jahre lang, fällige Rate r einer Rente, deren barer Wert (die Mise) $= w$ ist, wenn der Rechnung der Zinsfuss p % zu Grunde gelegt wird? (siehe nachfolgende Aufgabe 324);

c). Wie lange kann man eine nachschüssige Jahresrente r beziehen, deren barer Wert (die Mise) $= w$ ist, wenn der Rechnung der Zinsfuss p % zu Grunde liegt? (siehe nachfolgende Aufgabe 325) und

d). Zu welchem Zinsfuss muss eine nachschüssige Jahresrente r, deren barer Wert (Mise) $= w$ ist, angelegt werden, wenn dieselbe n Jahre lang laufen soll? (siehe nachstehende Aufgabe 326).

Diese Fragen lassen sich auch noch in veränderter Form fassen. Aehnliche Fragen kann man sich bei den später entwickelten Formeln stellen und zwar je nachdem die eine oder die andere Grösse gesucht ist.

des 3. Jahres zahlbaren Rate $r = \frac{r}{q^3}$ u. s. f., und schliesslich der bare Wert der am Ende des letzten, des n^{ten} Jahres zahlbaren Rate $r = \frac{r}{q^n}$, der bare Wert der vorletzten zahlbaren Rate $r = \frac{r}{q^{n-1}}$ u. s. f. ist, so erhält man für den baren Wert w der Rente selbst:

1). . . $w = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \ldots \frac{r}{q^{n-1}} + \frac{r}{q^n}$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe vorstellt (siehe Erkl. 40, Seite 18, der 2. Auflage),

deren Anfangsglied $a = \frac{r}{q}$

„ Quotient $= \frac{1}{q}$ und

„ letztes Glied $= \frac{r}{q^n}$ ist,

so erhält man nach der Summationsformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41, S. 18, der 2. Auflage)

$$w = \frac{\frac{r}{q^n} \cdot \frac{1}{q} - \frac{r}{q}}{\frac{1}{q} - 1}$$ oder:

$$w = \frac{\frac{r}{q^{n+1}} - \frac{r}{q}}{\frac{1 - q}{q}}$$

$$w = \frac{\frac{r - r \cdot q^n}{q^{n+1}}}{\frac{1 - q}{q}} = \frac{(r - r \cdot q^n) \cdot q}{q^{n+1}(1 - q)} = \frac{r - r \cdot q^n}{q^n (1 - q)}$$

oder:

$$w = \frac{-r + rq^n}{q^n(-1 + q)} = \frac{r(q^n - 1)}{(q - 1) \cdot q^n}$$

und dies ist vorstehende Formel 25ᵃ, aus welcher sich, für $q = 1{,}0p$ gesetzt, Formel 25 ergibt.

Erkl. 175. Der Formel 25 kann man noch durch einfache Umwandlung, für den Fall, dass w gesucht ist, eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form wie folgt geben. Aus Formel 25 erhält man:

$$w = \frac{r}{0{,}0p} \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p^n}$$

oder:

Formel 25[b]: $$w = \frac{r}{0{,}0p}\left(1 - \frac{1}{1{,}0p^n}\right)$$

Frage 37. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen oder Endwerts W einer nachschüssigen Jahresrente und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer nachschüssigen Jahresrente (Annuität) mit W, die jährlichen Rentenbezüge mit r, die Anzahl der Jahre, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die betreffende Formel:

Formel 27 $$W = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, d. h. $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt.

Formel 27[a]: $$W = \frac{r\,.\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Erkl. 176. Bezeichnet man den baren Wert einer n Jahre lang beziehbaren Rente mit w, deren Endwert mit W, so muss nach der Zinseszinsformel 1[a]:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n$$

wenn man in derselben $K = W$ und $k = w$ setzt, die Beziehung:

Formel 26: $W = w\,.\,1{,}0p^n$

oder:

Formel 26[a]: $W = w\,.\,q^n$ bestehen.

Erkl. 177. Nebenstehende Formel 27 hätte man auch direkt aus der früher entwickelten Zinseszinsformel Nr. 5:

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

herleiten können.

Mit Benutzung der in der Erkl. 176 entwickelten Formel 26:

$$W = w\,.\,1{,}0p^n$$

ergibt sich aus der Formel 25 vorstehende Formel 27, indem hiernach:

$$W = w\,.\,1{,}0p^n = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}\,.\,1{,}0p^n$$

oder:

$$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$ ist.

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164.)

Anmerkung 9. Diejenigen Aufgaben, deren numerische Berechnung auch ohne Anwendung der Logarithmen, nämlich mit Hülfe der am Schlusse dieses Buches beigegebenen Hülfstafeln ausgeführt werden können, sind mit einem Sternchen *). bezeichnet. Die in diesem Buche gelösten Aufgaben sind alle mittels direkter Anwendung der Logarithmen gelöst.

Anmerkung 10. Bemerkt sei noch, dass die nach den entwickelten Formeln vorgeführten gelösten Aufgaben nur zum bessern Verständnis der betreff. Formel dienen sollen und dass weitere diesbezügl. einfache und zusammengesetzte Aufgaben, und zwar gelöste und ungelöste Aufgaben in den späteren Abschn. E). und D). und in dem III. Teil dieses Buches enthalten sind.

*). **Aufgabe 323.** *A* will sich bei einer Lebensgesellschaft eine Leibrente sichern (siehe Erkl. 178). Die Gesellschaft veranschlagt den Unterhalt des *A* jährlich auf 750 Mark. Wieviel muss *A* bar entrichten, wenn seine wahrscheinliche Lebensdauer nach den Sterblichkeitstabellen 15 Jahre beträgt und wenn der Berechnung der Zinsfuss 4 % zu Grunde gelegt wird?

Erkl. 178. Ist die Zeit gegeben, welche angibt, wie lange jemand eine lebensängliche Rente, also eine sogenannte „Leibrente" bezieht, so kann man bei der Lösung solcher Aufgaben, welche über Leibrenten handeln, im allgemeinen gerade so verfahren, als bei der Lösung solcher Aufgaben, welche über Zeitrenten handeln, indem die für letztere aufgestellten Formeln auch bei den Leibrenten ihre Gültigkeit beibehalten (siehe den späteren Abschnitt C).

Erkl. 179. Zahlt man jetzt an eine Bank eine gewisse Summe ein, um hierfür eine von diesem Zeitpunkt beginnende jährliche Rente zu beziehen, so ist die erste Rate derselben offenbar nicht sofort, sondern jedenfalls erst am Ende des 1. Jahres fällig, denn im ersten Falle würde man jedenfalls eine um die 1. Rate verminderte Summe einzahlen. Man hat es somit bei der allgemeinen Ausdrucksweise, welche in der Aufgabe 323 benutzt ist, mit einer nachschüssigen Rente zu thun.

Erkl. 180. Bei der numerischen Ausrechnung von Rentenaufgaben sind die am Schlusse dieses Buches beigefügten Hülfstafeln von besonderem Vorteil.
Aus der Hülfstafel I findet man direkt:

$$1{,}04^{15} = 1{,}8009435$$

(siehe nachstehende Hülfsrechn. 1 u. Erkl. 181).

Hülfsrechnung 1.

$log\,1{,}04^{15} = 15 \,.\, log\,1{,}04$

Nun ist: $log\,1{,}04 = 0{,}0170333$

```
      0,0170333
          . 15
      --------
       851665
      170333
      --------
15 . log 1,04 = 0,2554995
                4896
                ----
                  99
                96,4
                ----
                 2,6
                 2,4
```

mithin ist:
$1{,}04^{15} = 1{,}800941$

Erkl. 181. Aus den für $1{,}04^{15}$ nach der Erkl. 180 und nach vorstehender Hülfsrechn. 1 gefundenen Werten, ersieht man, dass der mittels 7-stelliger Logarithmen berechnete Wert nicht bis auf die letzten Dezimalstellen mit

Formel 25: $w = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}$

Auflösung. Der Aufgabe gemäss hat man den baren Wert einer nachschüssigen (siehe Erkl. 179) Jahresrente von 750 Mark, welche 15 Jahre lang zahlbar ist, zu berechnen.

Setzt man daher in vorstehender Formel 25:

$w = x$
$r = 750$
$n = 15$ und
$p = 4$

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$1).\;\ldots\; x = \frac{750\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{15}}$$

Zur numerischen Berechnung von x ist es zunächst erforderlich, dass man den in der Klammer stehenden Summanden $1{,}04^{15}$ berechnet und den Ausdruck rechts soweit reduziert als möglich.

Man erhält nach nebenstehender Hülfsrechnung 1 oder nach der Erkl. 181 (siehe Anmerk. 9):

$$x = \frac{750\,(1{,}8009435 - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{15}}$$

oder reduziert:

$$2).\;\ldots\; x = \frac{7500\,.\,0{,}8009435}{4\,.\,1{,}04^{15}}$$

Hieraus kann man nun x weiter berechnen, indem man den Wert für $1{,}04^{15}$ aus der Hülfstafel I wie vorhin substituiert und den erhaltenen Bruch berechnet, oder indem man bei Anwendung der Logarithmen wie folgt verfährt (siehe Anmerk. 9):

$$log\,x = log\,75000 + log\,0{,}8009435 - (log\,4 + 15\,.\,log\,1{,}04)$$

Nun ist:

```
   log 0,8009435 =  0,9036000 - 1
                        + 16,2
                           2,7
                    ------------
                    0,9036019 - 1
 + log 75000     =  4,8750613
                    ------------
                    5,7786632 - 1
```

demjenigen aus der Hülfstafel I entnommenen Werte übereinstimmt.

Will man durch log. Rechnung einen mit jenem aus der Hülfstafel I entommenen Wert übereinstimmenden Wert erhalten, so muss man diese Rechnung mittels den in der Hülfstafel II enthaltenen 10-stelligen Logarithmen ausführen. Hiernach erhielte man z. B.:

$log\, 1{,}04^{15} = 15 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist: $log\, 1{,}04 = 0{,}0170333393$ (s. Hülfstafel II)

$. \, 15$

851666965
170333303

$15 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}2555000895$

oder: $15 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}2555001$

4896
105
96,4
8,6
7,2
1,4
1,2

mithin ist:

$1{,}04^{15} = 18009435$

Hülfsrechnung 2.

$log\, 4 = 0{,}6020600$

$15 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}2554995$ (siehe Hülfsr. 1)

$log\, 4 + 15 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}8575595$

oder $= 4{,}7786632$

$-(log\, 4 + 15 \,.\, log\, 1{,}04) = -0{,}8575595$ (Hülfsr. 2)

$log\, x = 3{,}9211037$

1036

mithin ist:

$x = 8338{,}3$

Hiernach muss A die Summe von 8338 Mark 80 pf. an die Gesellschaft bar entrichten.

*). **Aufgabe 324.** Eine Schuld von 3816 Mark, welche zu 4 % verzinst ist, soll in 5 jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Welche Summe ist am Ende eines jeden Jahres zu zahlen?

Erkl. 182. Derartige Aufgaben (siehe auch die Aufgabe 325 etc.) kann man auch ohne Benutzung der speziell für die Rentenrechnung aufgestellten sogenannten Rentenformeln, und zwar mittels Anwendung der im I. Teil aufgestellten Zinseszinsformeln (siehe Formel 7 in der Erkl. 56, Seite 29, der 2. Auflage) lösen.

Wie sich aus dieser Aufgabe ersehen lässt, kann man die Zinseszins- und die Rentenrechnung, in bezug auf derartige und andere ähnliche Aufgaben, wie sie besonders im III. Teil dieses Buches enthalten sind, nie streng von einander trennen, indem bei der Rentenrechnung meist nur andere Ausdrucksweisen als bei der Zinseszinsrechnung üblich sind.

Formel 25: $w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Der bare Wert der Schuld muss gleich der Summe der baren Werte sämtlicher Tilgungsquoten x sein. Da man aber diese Tilgungsquoten als die Raten x einer nachschüssigen Jahresrente betrachten kann, welche 5 Jahre lang zahlbar ist, so ist auch der bare Wert dieser gedachten Rente gleich der Summe der Barwerte jener Tilgungsquoten, bezw. gleich dem baren Werte der Schuld, also = 3816 Mark (siehe Erkl. 182). Setzt man daher in vorstehender Formel:

$w = 3816$
$r = x$
$p = 4$ und
$n = 5$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$3816 = \frac{x\,(1{,}04^5 - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^5}$$

woraus sich:

$$1). \; . \; . \; x = \frac{3816 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^5}{1{,}04^5 - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 183)}$$

ergibt.

Die numerische Ausrechnung hat analog wie in voriger Aufgabe gezeigt wurde, zu geschehen. Man erhält:

$$x = \frac{3816 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^5}{1{,}216652 - 1} \quad \text{(s. Hülfsrechn. 1)}$$

$$x = \frac{3816 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^5}{0{,}216652}$$

oder:

$$x = \frac{152{,}64 \,.\, 1{,}04^5}{0{,}216652}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 152{,}64 + 5 \,.\, \log 1{,}04 - \log 0{,}216652$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 152{,}64 &= 2{,}1836684 \\ + 5 \,.\, \log 1{,}04 &= 0{,}0851665 \quad \text{(s. Hülfsr. 1)} \\ &\ 2{,}2688349 \\ - \log 0{,}216652 &= +0{,}3357627 - 1 \quad (\text{„} \; 2) \\ &\ \;\; - \qquad\qquad + \\ \log x &= 1{,}9330722 + 1 \end{aligned}$$

oder:

$$\log x = 2{,}9330722$$

$$\begin{array}{r} 0720 \\ \hline 2 \end{array}$$

mithin ist:

$$num \log x = 857{,}18$$

Zur Tilgung jener zu 4 % verzinslichen Schuld von 3816 Mark sind 5 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 857 Mark 78 pf. abzutragen.

Erkl. 183. Man hätte zur Ansetzung der Bestimmungsgleichung 1). auch sagen können: Der Wert der Schuld von 3816 Mark nach 5 Jahren muss gleich dem Endwert der nachschüssigen Jahresrente sein, deren Raten von je x Mark 5 Jahre lang fällig sind (siehe Formel 27).

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}04^5 = 5 \,.\, \log 1{,}04$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist:} \quad \log 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ &\qquad\qquad . \, 5 \\ 5 \,.\, \log 1{,}04 &= 0{,}0851665 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1478 \\ \hline 187 \\ 178{,}5 \\ \hline 8{,}5 \end{array}$$

mithin ist:

$1{,}04^5 = 1{,}216652$
(siehe auch Hülfstafel I)

2). $\log 0{,}216652 = 0{,}3357587 - 1$

$$\begin{array}{r} 0{,}3357587 - 1 \\ + 40 \\ \hline 0{,}3357627 - 1 \end{array}$$

Aufgabe 325. Ein reicher Bürger zahlt dem Magistrat seiner Vaterstadt 50 000 Mark aus, wofür ihm dieser den Stadtzoll bewilligt, der sich durchschnittlich auf 2500 Mark beläuft. Wieviel Jahre kann der Bürger den Zoll erheben, wenn der Rechnung der Zinsfuss $4\frac{1}{4}$ % zu Grunde gelegt wird?

Formel 25: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Die jährlichen Stadtzoll-Einnahmen kann man als die Raten einer nachschüssigen Jahresrente von 2500 Mark, welche x Jahre lang fällig sind, betrachten, und zwar muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass der bare Wert dieser Rente gleich dem baren Betrag von 50 000 Mark ist, welche der Bürger an den Magistrat bezahlt hat.

Setzt man in vorstehender Formel:

$$w = 50\,000$$
$$r = 2500$$
$$p = 4{,}25 \text{ und}$$
$$n = x$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ . \ . \ 50000 = \frac{2500\,(1{,}0425^x - 1)}{0{,}0425 \,.\, 1{,}0425^x}$$

(siehe die Erkl. 184 und 185)

Hieraus erhält man x, wie folgt:

$$20 = \frac{1{,}0425^x - 1)}{0{,}0425 \,.\, 1{,}0425^x}$$

$$20 \,.\, 0{,}0425 \,.\, 1{,}0425^x = 1{,}0425^x - 1$$

$$0{,}8500 \,.\, 1{,}0425^x = 1{,}0425^x - 1$$

$$1 = 1{,}0425^x - 0{,}85 \,.\, 1{,}0425^x$$

$$1 = 1{,}0425^x \,.\, (1 - 0{,}85)$$

$$1{,}0425^x = \frac{1}{1 - 0{,}85} = \frac{1}{0{,}15} = \frac{100}{15}$$

$$2). \ . \ . \ 1{,}0425^x = \frac{20}{3}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, \log 1{,}0425 = \log 20 - \log 3$$

oder:

$$x = \frac{\log 20 - \log 3}{\log 1{,}0425}$$

$$x = \frac{1{,}3010300 - 0{,}4771213}{0{,}0180761} = \frac{0{,}8239087}{0{,}0180761}$$

$$x = \frac{8239087}{180761}$$

und nach einfacher Division:

$$x = 45{,}58$$

Hiernach kann der Bürger, ohne dass ihm oder dem Magistrat ein Schaden erwächst, den Stadtzoll $45\frac{1}{2}$ Jahre lang einnehmen.

Erkl. 184. Man beachte, dass der Zinsfaktor:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100} \text{ ist, dass also,}$$

wenn $p = 4\frac{1}{4} = 4{,}25$ ist, jener Zinsfaktor $=$

$$\frac{100 + 4{,}25}{100} = \frac{104{,}25}{100} = 1{,}0425 \text{ ist.}$$

(Siehe die Erkl. 9, Seite 2, der 2. Auflage, bezw. die Erkl. 2, Seite 3, in der 1. Auflage.)

Erkl. 185. Zum Ansatz der nebenstehenden Bestimmungsgleich. 1) hätte man auch sagen können:

Der Wert der 50 000 Mark nach x Jahren zu $4\frac{1}{4}$ % auf Zinseszinsen angelegt, ist gleich dem Endwert der nachschüssigen Jahresrente, deren Raten von je 2500 Mark x Jahre fällig sind (siehe Formel 27).

Aufgabe 326. Wenn eine nachschüssige Jahresrente, deren Raten je $= r$ sind, und welche n Jahre lang läuft, den baren Wert w hat, welches ist alsdann der Zinsfuss?

Formel 25: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Zur Bestimmung des gesuchten Zinsfusses x hat man nach vorstehender Formel die allgemeine Bestimmungsgleichung:

$$1). \ . \ . \ . \ w = \frac{r\,(1{,}0x^n - 1)}{0{,}0x \,.\, 1{,}0x^n}$$

Erkl. 186. Ist:

$\frac{1}{1{,}0x} = y$, so erhält man x, wie folgt:

$$\frac{1}{\frac{100+x}{100}} = y$$

$$\frac{100}{100+x} = y$$

$$100 = 100y + xy$$

$$\frac{100 - 100y}{y} = x$$

oder:

$$x = 100 \cdot \frac{1-y}{y}$$

Erkl. 187. Nebenstehende Gleichung:

$$w = \frac{100r}{100 \cdot \frac{1-y}{y}} \cdot \left(1 - y^n\right)$$

reduziert, gibt der Reihe nach:

$$w = \frac{ry}{1-y}\left(1 - y^n\right)$$

$$w - wy = ry \,.\, (1 - y^n)$$

$$w - wy = ry - ry^{n+1}$$

oder:

a). . . $ry^{n+1} - (w + r) \,.\, y + w = 0$

Erkl. 188. Im praktischen Leben wird es kaum vorkommen, dass der Zinsfuss p gesucht wird, denn dies ist stets eine gegebene Grösse; im übrigen findet man das Nähere in betreff der Auflösung höherer Gleichungen in Kleyers Lehrbücher der höheren Gleichungen.

Dies ist eine höhere Gleichung, und zwar mit 2 Unbekannten, indem in derselben einmal die unbekannte Grösse $0{,}0x$ und auch die unbekannte Grösse $1{,}0x^n$ vorkommt. Dieselbe ist im allgemeinen nicht lösbar; um jedoch wenigstens zur reduzierten Form einer höheren Gleichung zu kommen, verfahre man wie folgt:

Die Gleichung 1). reduziert, gibt:

$$w = \frac{100r\,(1{,}0x^n - 1)}{x \,.\, 1{,}0x^n} = \frac{100r}{x} \cdot \frac{1{,}0x^n - 1}{1{,}0x^n}$$

oder:

2). . . $w = \frac{100r}{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}0x^n}\right)$

Setzt man nunmehr:

A). $\frac{1}{1{,}0x} = y$

also:

$$x = 100 \cdot \frac{1-y}{y} \quad \text{(siehe Erkl. 186)}$$

und

$$\frac{1}{1{,}0x^n} = \left(\frac{1}{1{,}0x}\right)^n = y^n$$

so geht die Gleichung 2). über in:

$$w = \frac{100r}{100 \cdot \frac{1-y}{y}}\left(1 - y^n\right)$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 187:

B). . $ry^{n+1} - (w + r) \,.\, y + w = 0$

nämlich die reduzierte Form einer höheren Gleichung vom $n+1^{\text{ten}}$ Grade, welche je nach der Grösse des für n gegebenen Zahlenwertes gelöst werden kann (siehe Erkl. 190).

Siehe auch die Aufgaben 51 und 75 im I. Teil.

*). **Aufgabe 327.** Es bezieht jemand 18 Jahre lang eine nachschüssige Rente von 600 ℳ; wie hoch beläuft sich der Wert aller bezogenen Renten am Ende des 18. Jahres, wenn 5 % Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

Formel 27: $W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Setzt man in vorstehender Formel:

$$r = 600$$
$$p = 5$$
$$n = 18 \text{ und}$$
$$W = x$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots x = \frac{600\,(1{,}05^{18} - 1)}{0{,}05}$$

Hieraus ergibt sich zunächst:

$$x = \frac{600\,(2{,}40662 - 1)}{0{,}05} \quad \text{(siehe Hülfsrechnung)}$$

oder:

$$x = \frac{60000 \,.\, 1{,}40662}{5}$$

$$x = 12000 \,.\, 1{,}40662$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 12000 + \log 1{,}40662$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist: } \log 12000 &= 4{,}0791812 \\ + \log 1{,}40662 &= 0{,}1481706 \\ &\quad + 62 \\ \hline \log x &= 4{,}2273580 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3467 \\ \hline 113 \\ 102{,}8 \\ \hline 10{,}2 \\ 10{,}2 \end{array}$$

mithin:

$$x = 16879{,}44$$

Der gesuchte Endwert der Rente ist also = 16879 Mark 44 pf.

Hülfsrechnung.

$$\log 1{,}05^{18} = 18 \,.\, \log 1{,}05$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist: } \log 1{,}05 &= 0{,}0211892991\ ^{*}). \\ &\quad .\, 18 \\ \hline &\quad 1695143928 \\ &\quad 211892991 \\ \hline \log 1{,}05^{18} &= 0{,}3814073838 \end{aligned}$$

oder:

$$\log 1{,}05^{18} = 0{,}3814072$$

$$\begin{array}{r} 4039 \\ \hline 33 \\ 36{,}2 \end{array}$$

mithin ist:

$$1{,}05^{18} = 2{,}40662$$

*). Da der Exponent, mit welchem der Logarithmus multipliziert werden soll, eine zweiziffrige Zahl (= 18) ist, so benutzt man für den $\log 1{,}05$ den in der Hülfstafel II gegebenen 10-stelligen Logarithmus.

2). Entwicklung der Rentenformeln für eine vorschüssige Jahresrente.

Frage 38. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer vorschüssigen Jahresrente und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer vorschüssigen Jahresrente mit w, die jährlichen Raten oder Rentenbezüge mit r, die Zahl der Jahre, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die betreffende Rentenformel:

$$\text{Formel 28} \ldots\ldots w = \frac{r\,(1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

$$\text{Formel 28}^{a} \ldots\ldots w = \frac{r \,.\, (q^{n} - 1)}{q^{n-1} \,.\, (q - 1)}$$

Diese Formel kann man, analog wie die Formel 25, siehe Antw. der Frage 36, wie folgt herleiten:

Der bare Wert der am Anfang des 1. Jahres fälligen Rate r ist $= r$; der bare Wert der am Anfang des 2. Jahres fälligen Rate r ist (siehe Erkl. 29, Seite 10, bezw. Erkl. 11 in der 1. Auflage) $= \frac{r}{q}$; der bare Wert der am

Erkl. 189. Umstehende Formel 28 hätte man auch, analog wie die Formel 25, siehe Erkl. 172, aus den Formeln 1^b und 10^a, nämlich aus den Formeln:

1). . . $K = k \cdot q^n$

2). . . $K = \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q - 1}$

ableiten können. Analog wie in der Erkl. 172 erhält man hieraus:

a). . . $w \cdot q^n = \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q - 1}$

oder:

b). . . $w = \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q^n (q - 1)} = \frac{r (q^n - 1)}{q^{n-1} (q - 1)}$

nämlich umstehende Formel 28^a.

Erkl. 190. Umstehende Formel 28 kann man auch ferner noch ableiten, analog wie es für die Formel 25 in der Erkl. 173 angegeben wurde.

Setzt man nämlich in der Formel 9^a:

$$K = k \cdot q^n - \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q - 1}$$

$K = 0$ und $k = w$, so erhält man hieraus:

$$0 = w \cdot q^n - \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q - 1}$$

oder:

$$w \cdot q^n = \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q - 1}$$

mithin:

$$w = \frac{r \cdot q (q^n - 1)}{q^n (q - 1)} = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$

nämlich umstehende Formel 28^a.

Anfang des 3. Jahres fälligen Rate r ist $= \frac{r}{q^2}$ u. s. f. Aus der Analogie dieser gefundenen Barwerte ergibt sich, dass der bare Wert der am Anfang des letzten, des n^{ten} Jahres fälligen Rate $r = \frac{r}{q^{n-1}}$ ist.

Für den baren Wert w der ganzen Rente besteht somit die Gleichung:

1). . . $w = r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \cdots \frac{r}{q^{n-1}}$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe ist (siehe Erkl. 40, Seite 18, der 2. Auflage),

deren Anfangsglied $a = r$

„ Quotient $q = \frac{1}{q}$ und

„ letztes Glied $t = \frac{r}{q^{n-1}}$ ist,

so erhält man nach der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41, Seite 18, der 2. Auflage)

$$w = \frac{\frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{1}{q} - r}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{\frac{r}{q^n} - r}{\frac{1 - q}{q}}$$

$$w = \frac{r - rq^n}{q^n} : \frac{1 - q}{q} = \frac{(r - rq^n) \cdot q}{q^n (1 - q)} = \frac{r \cdot (1 - q^n)}{q^{n-1} \cdot (1 - q)}$$

oder:

$$w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$

und dies ist vorstehende Formel 28^a, aus welcher sich, für $q = 1{,}0p$ gesetzt, Formel 28 ergibt (siehe auch die Erkl. 189 und 190).

Frage 39. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen oder Endwertes einer vorschüssigen Jahresrente und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer vorschüssigen Jahresrente mit W, die jährlichen Raten oder Rentenbezüge mit r, die Anzahl der Jahre, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 29 $W = \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 29a. $W = \frac{r \cdot q\,(q^n - 1)}{q - 1}$

Diese Formel kann man wie folgt herleiten:

Mit Benutzung der in der Erkl. 176 entwickelten Formel 26:

$$W = w \cdot 1{,}0p^n$$

ergibt sich aus der Formel 28 vorstehende Formel 29, indem hiernach:

$$W = w \cdot 1{,}0p^n = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p} \cdot 1{,}0p^n$$

oder:

$$W = \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \text{ ist.}$$

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164.)

*). **Aufgabe 328.** Jemand versichert sein Leben am Anfang des 35. Jahres mit 5000 Mark und zahlt dafür am Anfange jeden Jahres eine Prämie von 100 Mark. Wenn er nun bald nach Beginn des 75. Jahres stirbt, was gewinnt oder verliert die Bank, die Zinsen zu 4 % gerechnet?

Erkl. 191. Prämie (v. lat. *praemium*), d. h. eine Belohnung.

Im Versicherungswesen versteht man unter Prämie im allgemeinen eine im voraus zu entrichtende Summe, für welche der Empfänger derselben (die Versicherungsgesellschaft) gewisse Verpflichtungen übernimmt.

Erkl. 192. Vom Anfange des 35. bis Ende des 74. Lebensjahres verfliessen 40 Jahre. Diese Zeit gibt an, wie lange die gedachte vorschüssige Rente läuft.

Formel 29: $W = \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Bezeichnet man die Summe der Endwerte der von Seiten des Versicherten vom Anfang seines 35. Lebensjahres an geleisteten jährlichen Prämien von 100 Mark (siehe Erkl. 191) bis zu dem Ende des 74. Lebensjahres mit y, so ist die Summe dieser Endwerte gleich dem Endwerte einer vorschüssigen Jahresrente von 100 Mark, welche 40 Jahre läuft (siehe Erkl. 192), somit hat man nach vorstehender Formel, wenn man in derselben:

$$W = y$$
$$r = 100$$
$$p = 4 \text{ und}$$
$$n = 40 \text{ setzt:}$$

a). . . $y = \frac{100 \cdot 1{,}04\,(1{,}04^{40} - 1)}{0{,}04}$

Da nun der Versicherte gleich am Anfang seines 75. Lebensjahres stirbt, so hatte er auch noch die am Anfang

des 75. Lebensjahres fällige Prämie von 100 Mark zu zahlen und somit bei der Bank eine Summe Geldes eingezahlt, welche bis zu seinem Tode den Wert von

b). . $z = \frac{100 \cdot 1{,}04\,(1{,}04^{40} - 1)}{0{,}04} + 100$

Mark repräsentiert. Die Bank ist nunmehr zu diesem Zeitpunkte verpflichtet, die versicherte Summe von 5000 Mark auszuzahlen, und es ergibt sich der Gewinn oder der Verlust der Bank aus der Gleichung:

1). . $x = \frac{100 \cdot 1{,}04\,(1{,}04^{40} - 1)}{0{,}04} + 100 - 5000$

Hülfsrechnung.

$log\,1{,}04^{40} = 40 \cdot log\,1{,}04$

Nun ist: $log\,1{,}04 = 0{,}0170333393$ (s. Hülfstafel II)
$\cdot\,40$

$log\,1{,}04^{40} = 0{,}6813335720$

oder:

$log\,1{,}04^{40} = 0{,}6813336$
3317
19
18,2

mithin ist:
$1{,}04^{40} = 4{,}80102$
(siehe Hülfstafel I)

Diese Gleichung reduziert und für $1{,}04^{40}$ den nach nebenstehender Hülfsrechnung berechneten Wert substituiert, gibt:

$$x = \frac{100 \cdot 104 \cdot (4{,}80102 - 1)}{4} - 4900$$

oder:

$$x = 100 \cdot 26 \cdot 3{,}80102 - 4900$$

$$x = 26 \cdot 380{,}102 - 4900$$

$$x = 9882{,}652 - 4900$$

oder:

$$x = 4982{,}652$$

Die Bank hat somit bei dieser Versicherung 4982 Mark 65 pf. gewonnen.

*). **Aufgabe 329.** Jemand will durch 15 Jahre am Anfang eines jeden Jahres in eine Rentenanstalt eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf dieser Zeit er selbst oder ein anderer 10 Jahre hindurch eine am Ende eines jeden Jahres fällige Jahresrente von 2000 Mark geniesst. Wie gross ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn 5 % Zinsen gerechnet werden?

Formel 29: $W = \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$
(für eine vorschüssige Rente)

Formel 25: $w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$
(für eine nachschüssige Rente)

Auflösung. Die am Anfang eines jeden Jahres, 15 Jahre lang, der Rentenanstalt zu machenden und gesuchten Zahlungen von je x, bilden die Raten einer vorschüssigen Rente, deren Endwert y nach Ablauf jener 15 Jahre gleich dem für diese Zeit berechneten Barwert z der nachschüssigen Jahresrente von 2000 Mark, welche 10 Jahre lang laufen soll, sein muss; man hat somit die Relation:

1). $y = z$

Da man nun für den Endwert y jener gedachten vorschüssigen Jahresrente, wenn man in vorstehender Formel 29:

$$W = y$$
$$r = x$$
$$p = 5 \quad \text{und}$$
$$n = 15 \quad \text{setzt:}$$

$$2). \; . \; . \; y = \frac{x \,.\, 1{,}05\,(1{,}05^{15} - 1)}{0{,}05}$$

und für den baren Wert z jener nachschüssigen Jahresrente zu der Zeit, für welche der Endwert y berechnet wurde, wenn man in vorstehender Formel 25:

$$w = z$$
$$r = 2000$$
$$p = 5 \quad \text{und}$$
$$n = 10 \quad \text{setzt:}$$

$$3). \; . \; . \; z = \frac{2000\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^{10}}$$

erhält, so ergibt sich aus den Gleichungen 1)., 2) und 3). für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \; . \; \frac{x \,.\, 1{,}05\,(1{,}05^{15} - 1)}{0{,}05} = \frac{2000\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05 \,.\, 1{,}05^{10}}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x \,.\, 1{,}05\,(2{,}07893 - 1) = \frac{2000\,(1{,}62889 - 1)}{1{,}05^{10}}$$

$$x \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}07893 = \frac{2000 \,.\, 0{,}62889}{1{,}05^{10}}$$

oder:

$$x = \frac{2000 \,.\, 0{,}62899}{1{,}05^{10} \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}07893}$$

Hieraus erhält man durch Logarithmierung:

$$\log x = \log 2000 + \log 0{,}62889 - (\log 1{,}05^{10} + \log 1{,}05 + \log 1{,}07893)$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nun ist: } \log 2000 = & 3{,}3010300 \\
+ \log 0{,}62889 = & 0{,}7985747 - 1 \\
\hline
 & 4{,}0996047 - 1 \\
\text{oder} = & 3{,}0996047 \\
- (\log 1{,}05^{10} + \log 1{,}05 + \log 1{,}07893) = & -0{,}2660756 \text{ (s. Hülfsr. 3)} \\
\hline
\log x = & 2{,}8335291 \\
 & 5296 \\
\hline
\end{array}$$

mithin:

$$\text{numlog}\, x = 681{,}60$$

Um sich die gedachte nachschüssige Jahresrente zu erwerben, hat somit jene Person am Anfang eines jeden Jahres 15 Jahre lang die Summe von 681 Mark 60 pf. an die Rentenanstalt zu zahlen.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}05^{15} = 15 \,.\, \log 1{,}05$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nun ist: } \log 1{,}05 = & 0{,}0211892991 \text{ (s. Hülfstafel II)} \\
 & .\,15 \\
\hline
 & 1059464955 \\
 & 211892991 \\
\hline
\log 1{,}05^{15} = & 0{,}3178394865 \\
\text{oder: } \log 1{,}05^{15} = & 0{,}3178395 \\
 & 8336 \\
\hline
 & 59 \\
 & 62{,}7
\end{array}$$

mithin ist:
$1{,}05^{15} = 2{,}07893$

2). $\log 1{,}05^{10} = 10 \,.\, \log 1{,}05$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nun ist: } \log 1{,}05 = & 0{,}0211892991 \\
 & .\,10 \\
\hline
\log 1{,}05^{10} = & 0{,}2118929910 \\
\text{oder: } \log 1{,}05^{10} = & 0{,}2118930 \\
 & 8678 \\
\hline
 & 252 \\
 & 239{,}4 \\
\hline
 & 12{,}6
\end{array}$$

mithin ist:
$1{,}05^{10} = 1{,}62889$

$$\begin{array}{rll}
3). \; . \; . \; \log 1{,}05^{10} = & 0{,}2118930 & \text{(s. Hülfsr. 2)} \\
+ \log 1{,}05 = & 0{,}0211893 & \text{(" \;\; " \;\; 2)} \\
+ \log 1{,}07893 = & 0{,}0329812 & \\
 & +\,120{,}6 & \\
\hline
 & 0{,}2660756 &
\end{array}$$

Aufgabe 330. Jemand verkauft ein Anwesen für 200 000 Mark gegen eine sofort beginnende, am Anfang eines jeden Jahres zu zahlende Rente von 12875 Mark. Wieviel Jahre wird der Verkäufer die Rente beziehen, wenn der Zinsfuss mit $5\frac{1}{2}$ % vereinbart wurde?

Erkl. 193. Ein Satz aus der Lehre der Potenzen heisst:

„Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und dann mit dieser Summe jene gemeinschaftliche Basis potenziert."

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.)

Hiernach ist:

$$1{,}055^x \cdot 1{,}055^{-1} = 1{,}055^{x-1}$$

Hülfsrechnungen:

1). $\log 200000 \,.\, 1{,}055^{-1} \,.\, 0{,}055 =$
$\log 200000 + -1 \,.\, \log 1{,}055 + \log 0{,}055 =$
$\log 200000 - \log 1{,}055 + \log 0{,}055$ (s. Erkl. 194)

Nun ist: $\log 200000 = 5{,}3010300$
$+ \log 0{,}055 = 0{,}7403627 - 2$
$6{,}0413927 - 2$

oder $= 4{,}0413927$
$- \log 1{,}055 = -0{,}0232525$
$4{,}0181402$

1177
225
208,5
16,5
16,6

mithin ist:

$$200000 \,.\, 1{,}055^{-1} \,.\, 0{,}055 = 10426{,}54$$

2). $\log 244846 = 5{,}3888824$
$+ 106{,}2$
$5{,}3888930$

Erkl. 194. Für den Zahlenausdruck:

$$200000 \,.\, 1{,}055^{-1} \,.\, 0{,}055$$

kann man auch schreiben:

$$\frac{200000 \,.\, 0{,}055}{1{,}055}$$

und dieser Ausdruck logarithmiert, gibt:

$$\log 200000 + \log 0{,}055 - \log 1{,}055$$

nämlich denselben Ausdruck als in der Hülfsrechnung 1.

Formel 28: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}$

Formel 29: $W = \dfrac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Bei jedem Verkauf müssen die gegenseitigen Leistungen einander gleich sein, demnach muss der bare Wert der Rente, welche der Verkäufer seines Anwesens für dasselbe erlangen will, gleich dem Barwerte von 200 000 Mark dieses Anwesens sein.

Setzt man daher in vorstehender Formel 28:

$w = 200\,000$
$r = 12875$
$p = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$, also $1{,}0p = 1{,}055$ (siehe Erkl. 184)

und die gesuchte Anzahl n der Jahre $= x$, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \;.\;.\; 200000 = \frac{12875\,(1{,}055^x - 1)}{1{,}055^{x-1} \,.\, 0{,}055}$$

Diese Gleichung nach x, bezw. zunächst nach der Potenz $1{,}055^x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$200000 \,.\, 1{,}055^{x-1} \,.\, 0{,}055 = 12875 \,.\, 1{,}055^x - 12875$$

$$200000 \,.\, 1{,}055^x \,.\, 1{,}055^{-1} \,.\, 0{,}055 - 12875 \,.\, 1{,}055^x = -12875 \text{ (siehe Erkl. 193)}$$

$$1{,}055^x\,(200000 \,.\, 1{,}055^{-1} \,.\, 0{,}055 - 12875) = -12875$$

$$1{,}055^x = \frac{-12875}{200000 \,.\, 1{,}055^{-1} \,.\, 0{,}055 - 12875}$$

$$1{,}055^x = \frac{-12875}{10426{,}54 - 12875} \text{ (siehe Hülfsrechn. 1)}$$

$$1{,}055^x = \frac{-12875}{-2448{,}46}$$

oder:

$$1{,}055^x = \frac{1287500}{244846}$$

Durch Logarithmierung erhält man hieraus:

$$x \,.\, \log 1{,}055 = \log 1287500 - \log 244846$$

$$x = \frac{\log 1287500 - \log 244846}{\log 1{,}055}$$

$$x = \frac{6{,}1097472 - 5{,}3888930}{0{,}0232525} \text{ (s. Hülfsrechn. 2)}$$

Hülfsrechnungen:

3). $log\ 200000 . 1{,}055^{31} = 31 . log\ 1{,}055 + log\ 200000$

Nun ist: $log\ 1{,}055 = 0{,}0232524596$ (s. Hülfstaf. II)

$$\begin{array}{r} 0{,}0232524596 \\ .\ 31 \\ \hline 232524596 \\ 697573788 \\ \hline 0{,}7208262476 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{oder} = & 0{,}7208262 \\ +\ log\ 200000 = & 5{,}3010300 \\ \hline & 6{,}0218562 \\ & 8506 \\ \hline & 56 \\ & 41{,}3 \\ \hline & 14{,}7 \\ & 12{,}4 \\ \hline & 2{,}3 \\ & 2{,}4 \end{array}$$

mithin ist:

$200000 . 1{,}055^{31} = 1051613{,}6$ *).

*). Zur Berechnung bis auf einzelne Pfennige genau hätten hier durchgehends 10-stellige Logarithmen angewandt werden müssen.

4). $\frac{12875 . 1{,}055\ (1{,}055^{31} - 1)}{0{,}055}$

$= \frac{12875 . 1055\ (5{,}25807 - 1)}{55}$ (s. Hülfsr. 5)

$= \frac{12875 . 1055 . 4{,}25807}{55}$

$log\ \frac{12875 . 1055 . 4{,}25807}{55} = log\ 12875 + log\ 1055 + log\ 4{,}25807 - log\ 55$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\ 12875 = & 4{,}1097472 \\ +\ log\ 1055 = & 3{,}0232525 \\ +\ log\ 4{,}25807 = & 0{,}6292057 \\ & +\ 71 \\ \hline & 7{,}7622125 \\ -\ log\ 55 = & -1{,}7403627 \\ \hline & 6{,}0218498 \\ & 8093 \\ \hline & 405 \\ & 371{,}7 \\ \hline & 33{,}3 \\ & 33{,}0 \\ \hline & 0{,}3 \\ & 0{,}4 \end{array}$$

mithin ist:

$\frac{12875 . 1055\ (1{,}055^{31} - 1)}{55} = 1051598{,}1$

5). . . $log\ 1{,}055^{31} = 0{,}7208262$ (s. Hülfsr. 3)

$$\begin{array}{r} 8206 \\ \hline 56 \\ 57{,}4 \end{array}$$

mithin ist:

$1{,}055^{31} = 5{,}25807$

$$x = \frac{0{,}7208542}{0{,}0232525}$$

oder:

$$x = \frac{7208542}{232525}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division:

$$x = 31{,}0012$$

Die in Rede stehende Rente wäre hiernach = 31,0012 Jahre lang fällig; d. h. der Verkäufer wird 31 Jahre lang die Rente von 12875 Mark beziehen und ausserdem noch, nach dem Jahresbruchteil von $\frac{12}{10000}$ des 32. Jahres, einen dem Jahresbruchteil entsprechenden Rentenbezug zu beanspruchen haben.

Damit nun am Schlusse des 31. Jahres die gegenseitigen Forderungen sich ausgleichen, untersucht man, welches die Werte der gegenseitigen Leistungen bis zum Ende des 31. Jahres sind, die Differenz dieser beiden Werte ergibt das Guthaben des einen oder des andern der beiden Kontrahenten.

Nach der Hauptzinseszinsformel 1^b ist bis Ende des 31. Jahres der Wert des Anwesens

$$= 200000 . 1{,}055^{31}$$

oder nach der Hülfsrechnung 3).:

$$= 1051613{,}6$$

ferner ist nach der vorstehenden Formel 29 der Wert der gezahlten Rente

$$= \frac{12875 . 1{,}055\ (1{,}055^{31} - 1)}{0{,}055}$$

oder nach der Hülfsrechnung 2).:

$$= 1051598{,}1$$

Nun ist:

$$1051613{,}6 - 1051598{,}1 = 15{,}5$$

d. h. am Ende des 31. Jahres hat der Verkäufer noch 15 Mark 50 pf. zu gute, was dadurch ausgeglichen wird, dass am Ende des 31. Jahres statt des Rentenbezuges von 12875 Mark die Summe von 12890 Mark 50 pf. bezahlt wird.

3). Entwicklung der Rentenformeln für eine nachschüssige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Frage 40. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer nachschüssigen Rente, deren Raten r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit w, die Anzahl der Jahre mit n, also die Anzahl der Rentenbezüge mit $m.n$, und den Zinsfuss mit p, so heisst die betreffende Formel:

Formel 30 $$w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n}}$$

oder wenn man:

$$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100},$$ das ist der Wert der Geldeinheit bei p % nach $\frac{1}{m}$ Jahr $= q_1$, also

$$0{,}0\frac{p}{m} = \frac{p}{m \cdot 100} = q_1 - 1 \left(\text{nämlich} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} - 1, \text{ d. i.} = 1 + \frac{p}{m.100} - 1 = \frac{p}{m.100}\right)$$

setzt:

Formel 30[a] $$w = \frac{r \cdot (q_1^{m \cdot n} - 1)}{(q_1 - 1) \cdot q_1^{m \cdot n}}$$

Diese Formel kann man ganz analog wie die Formel 25, siehe Antwort der Frage 36, ableiten. Man kann sie aber auch aus jener Formel 25 direkt ableiten, wenn man berücksichtigt, dass der Zinsfuss für das $\frac{1}{m}$ Jahr proportional diesem Jahresbruchteil, also $= \frac{p}{m}$ angenommen wird (siehe Erkl. 38, bezw. Erkl. 7 der 1. Auflage), dass somit der Zinsfaktor $1{,}0p$ der Formel 25 übergeht in:

$$\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$$

mithin auch für $0{,}0p$ der Wert $\frac{p}{m.100}$ gesetzt werden muss, und dass schliesslich die Anzahl der Zeitabschnitte nicht wie in der Formel 25 $= n$, sondern für diesen Fall $= m.n$ ist.

Im übrigen vergleiche man hiermit die Antwort der Frage 10, bezw. der Frage 9 der 1. Auflage.

Frage 41. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen oder Endwerts W einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer nachschüssigen Rente, deren Raten r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit W, die Anzahl der Jahre mit n, also die Anzahl der Rentenbezüge mit $m.n$, den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 31 $$W = \frac{r.\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

oder wenn man:

$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$, das ist der Wert der Geldeinheit bei p % nach $\frac{1}{m}$ Jahr, mit q_1 bezeichnet, also

$0{,}0\frac{p}{m} = \frac{p}{m.100} = q_1 - 1$ $\left(\text{nämlich} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} - 1, \text{ d. i.} = 1 + \frac{p}{m.100} - 1 = \frac{p}{m.100}\right)$

setzt:

Formel 31[a] $$W = \frac{r.(q_1^{m.n} - 1)}{q_1 - 1}$$

Diese Formel ergibt sich aus der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26, wenn man berücksichtigt, dass in derselben für diesen Fall nach voriger Antwort

$$w = \frac{r\,(q_1^{m.n} - 1)}{q_1 - 1}$$

$q = q_1$ und

$n = m.n$ gesetzt werden muss.

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164.)

Aufgabe 331. Man will für jemand eine halbjährlich mit 2500 Mark postnumerando zu erhebende Rente von jährlich 5000 Mark für die Summe von 100000 Mark kaufen; für wieviel Jahre kann ihm diese Rente bewilligt werden, wenn $4\frac{1}{2}$ % Zinsen in Rechnung kommen?

Formel 30: $$w = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die Anzahl der Jahre gesucht, welche angibt, wie lange für die bar eingezahlte Summe von 100000 Mark eine nachschüssige halbjährliche Rente von 2500 Mark bezogen werden kann.

Erkl. 195. Da die jährliche Rente 5000 ℳ, also die halbjährliche die Hälfte hiervon, nämlich = 2500 ℳ betragen soll, so wird auch hier (im bürgerlichen Leben), wie bei der Entwicklung der Formel 30 erwähnt wurde, für den Zinsfuss der halbjährlichen Rente ein jenem Jahresbruchteil proportionaler Teil des jährlichen Zinsfusses, nämlich der Zinsfuss $\frac{4\frac{1}{2}}{2}$ angenommen.

Mit Benutzung vorstehender Formel (siehe Erkl. 195) ergibt sich, wenn man in derselben:

$$w = 100000$$
$$r = 2500$$
$$n = x$$
$$m = 2 \text{ und}$$
$$p = 4\tfrac{1}{2} = 4{,}5$$
$$\text{also } \frac{p}{m} = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$$

setzt, für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots 100000 = \frac{2500\,(1{,}0225^{2.x} - 1)}{0{,}0225 \,.\, 1{,}0225^{2.x}}$$

Diese Gleichung nach x, bezw. zunächst nach $1{,}0225^{2x}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$100000 \,.\, 0{,}0225 \,.\, 1{,}0225^{2x} = 2500 \,.\, 1{,}0225^{2x} - 2500$$

$$2500 = 2500 \,.\, 1{,}0225^{2x} - 100000 \,.\, 0{,}0225 \,.\, 1{,}0225^{2x}$$

$$1{,}0225^{2x}\,(2500 - 100000 \,.\, 0{,}0225) = 2500$$

$$1{,}0225^{2x} = \frac{2500}{2500 - 100000 \,.\, 0{,}0225} = \frac{2500}{2500 - 2250}$$

und

$$1{,}0225^{2x} = \frac{2500}{250}$$

Durch Logarithmierung ergibt sich hieraus:

$$2x \,.\, log\, 1{,}0225 = log\, 2500 - log\, 250$$

und

$$x = \frac{log\, 2500 - log\, 250}{2 \,.\, log\, 1{,}0225}$$

$$x = \frac{3{,}3979400 - 2{,}3979400}{2 \,.\, 0{,}0096633}$$

$$x = \frac{1}{0{,}0193266} = \frac{10000000}{193266}$$

und hieraus ergibt sich nach einfacher Division:

$$x = 51{,}74$$

Die gedachte Rente kann hiernach in den Zeitabschnitten von je $\frac{1}{2}$ Jahr 51,74 Jahre lang bezogen werden, d. h. die Rente von 2500 ℳ ist $51{,}50 = 51\frac{1}{2}$ Jahre lang am Ende eines jeden halben Jahres fällig; für den noch übrigbleibenden Jahresbruchteil von 0,24 Jahr kann man, wie in der Aufgabe 330 gezeigt wurde, einen Betrag berechnen, um welchen die am Ende des letzten halben Jahres fällige Rate von 2500 Mark höher sein muss als die übrigen.

*). **Aufgabe 332.** Jemand will eine solche Summe bei einer Rentenanstalt einzahlen, dass er nach 25 Jahren, wenn er halbjährlich 100 Mark hinzufügt, so viel hat, damit er für diesen Betrag 10 Jahre lang eine Jahresrente von 2000 Mark beziehen kann. Wie gross müsste jene Summe sein, Zinsfuss = 4 % gerechnet?

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 31: $W = \dfrac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

Formel 25: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Damit die gegenseitigen Leistungen zwischen dem Rentenempfänger und dem Rentengeber einander gleich sind, muss man annehmen, dass der Endwert des gesuchten Kapitals x, welches der Rentenempfänger sofort einzahlt, plus dem Endwert der Ratenzahlungen, die er halbjährlich bis Ende des 25. Jahres leistet, gleich dem für diesen Zeitpunkt berechneten Wert der 10 Jahre lang fälligen Jahresrente von 2000 Mark ist, welche der Rentengeber (die Rentenanstalt) zu leisten hat.

Nach vorstehender Formel 1ª ist der Endwert des bar eingezahlten und gesuchten Kapitals x bis zu Ende des 25. Jahres =

a). $x \,.\, 1{,}04^{25}$

Dann ist nach vorstehender Formel 31 der Endwert der am Ende eines jeden ½ Jahres nachgezahlten Summen von je 100 Mark bis zu Ende des 25. Jahres, wenn man in der Formel 31:

$r = 100$
$n = 25$
$m = 2$ und
$p = 4$, also $\frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2$ setzt:

$$= \frac{100\,(1{,}02^{2.25} - 1)}{0{,}02}$$

oder:

b). . . $= \dfrac{100\,(1{,}02^{50} - 1)}{0{,}02}$

Schliesslich ist nach vorstehender Formel 25 der Wert, zur Zeit des Anfangs des 26. Jahres, der am Ende eines jeden folgenden Jahres, 10 Jahre lang, fälligen Rentenbezüge von je 2000 Mark, wenn man in Formel 25:

$r = 2000$
$p = 4$ und
$n = 10$ setzt:

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}02^{50} = 50 \,.\, log\, 1{,}02$

Nun ist: $log\, 1{,}02 = 0{,}0086001718$ (s. Hülfstaf. II)
$.\, 50$
$= 0{,}4300085900$
oder: $= 0{,}4300086$
4299944
142
128,8
13,2
12,8

mithin ist:
$1{,}02^{50} = 2{,}691588$

2). $log\, 1{,}04^{10} = 10 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist: $log\, 1{,}04 = 0{,}0170333393$ (s. Hülfstaf. II)
$.\, 10$
$10 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}1703333930$
oder: $= 0{,}1703334$
3204
130
117,2
12,8
11,7

mithin ist:
$1{,}04^{10} = 1{,}480244$

Hülfsrechnungen:

3). $\log \frac{50000 \,.\, 0{,}480244}{1{,}04^{10}} = \log 50000 + \log 0{,}480244 - 10 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 0{,}480244 & = & 0{,}6814583 - 1 \\ & & + 36{,}4 \\ \hline & & 0{,}6814619 - 1 \\ + \log 50000 & = & 4{,}6989700 \\ \hline & & 5{,}3804319 - 1 \\ \text{oder:} & = & 4{,}3804319 \\ -10 \,.\, \log 1{,}04 & = & -0{,}1703334 \text{ (s. Hülfsr. 2)} \\ \hline & & 4{,}2100985 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0776 \\ \hline 209 \\ 187{,}6 \\ \hline 21{,}4 \\ 21{,}4 \end{array}$$

mithin:

$$\frac{50000 \,.\, 0{,}480244}{1{,}04^{10}} = 16221{,}78$$

4). $\log 1{,}04^{25} = 25 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 1{,}04 & = & 0{,}0170333393 \text{ (siehe Hülfstafel II)} \\ & & .\,25 \\ \hline & & 851666965 \\ & & 340666786 \\ \hline \log 1{,}04^{25} & = & 0{,}4258334825 \\ \text{oder:} & = & 0{,}4258335 \end{array}$$

c). . . . $\frac{2000\,(1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{10}}$

Zur Berechnung von x hat man somit die Bestimmungsgleichung:

1). . . $x \,.\, 1{,}04^{25} + \frac{100 \,.\, (1{,}02^{50} - 1)}{0{,}02} = \frac{2000\,(1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{10}}$

Diese Gleichung reduziert und für $1{,}02^{50}$ und $1{,}04^{10}$ die mittels der Hülfsrechnungen 1). und 2). berechneten Werte substituiert, gibt:

$$x \,.\, 1{,}04^{25} + 5000\,(2{,}691588 - 1) = \frac{50000\,(1{,}480244 - 1)}{1{,}04^{10}}$$

oder:

$$x \,.\, 1{,}04^{25} + 5000 \,.\, 1{,}691588 = \frac{50000 \,.\, 0{,}480244}{1{,}04^{10}}$$

$$x \,.\, 1{,}04^{25} + 8457{,}94 = 16221{,}78 \text{ (siehe Hülfsrechn. 3)}$$

$$x \,.\, 1{,}04^{25} = 16221{,}78 - 8457{,}94$$

$$x \,.\, 1{,}04^{25} = 7763{,}84$$

$$x = \frac{7763{,}84}{1{,}04^{25}}$$

Logarithmiert man jetzt, so ergibt sich:

$$\log x = \log 7763{,}84 - 25 \,.\, \log 1{,}04$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 7763{,}84 & = & 3{,}8900743 \\ & & + 22{,}4 \\ \hline & & 3{,}8900765 \\ -25 \,.\, \log 1{,}04 & = & -0{,}4258335 \text{ (s. Hülfsr. 4)} \\ \hline \log x & = & 3{,}4642430 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2361 \\ \hline 69 \\ 74{,}5 \end{array}$$

mithin:

$$x = 2912{,}35$$

Die gesuchte Summe, welche bei der Rentenanstalt eingezahlt wurde, ist somit: 2912 Mark 35 pf.

4). Entwicklung der Rentenformeln für eine vorschüssige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Frage 42. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer vorschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer vorschüssigen Rente, deren Raten r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit w, die Anzahl der Jahre mit n, also die Anzahl der Rentenbezüge mit $m \,.\, n$ und den Zinsfuss mit p, so heisst die betreffende Formel:

Formel 32 $w = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1}}$

oder wenn man:

$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} = q_1$, also

$0{,}0\frac{p}{m} = \frac{p}{m.100} = q_1 - 1$ $\Big($nämlich $= \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} - 1$, d. i. $= 1 + \frac{p}{m.100} - 1 = \frac{p}{m.100}\Big)$ setzt:

Formel 32ᵃ $w = \frac{r\,(q_1^{m.n} - 1)}{q_1^{m.n-1} \cdot (q_1 - 1)}$

Diese Formel wird, analog der Entwicklung der Formel 30, aus der in Antw. der Frage 38 entwickelten Formel dadurch hergeleitet, dass man in derselben für den Zinsfaktor $(1{,}0p) = 1{,}0\frac{p}{m}$ und für die Anzahl der Jahre oder Zeitabschnitte, bezw. für die Anzahl der Rentenbezüge $= m.n$ setzt. Hiernach erhält man aus den Formeln 28 und 28ᵃ die vorstehenden Formeln 32 und 32ᵃ.

Im übrigen vergleiche man hiermit die Antwort der Frage 10, bezw. der Frage 9 der 1. Auflage.

Frage 43. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen oder Endwerts einer vorschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer vorschüssigen Rente, deren Raten r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit W, die Anzahl der Jahre mit n, also die Anzahl der Rentenbezüge mit $m.n$, den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 33 $W = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

oder wenn man:

$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} = q_1$, also

$0{,}0\frac{p}{m} = \frac{p}{m.100} = q_1 - 1$ setzt:

Formel 33ᵃ $W = \frac{r \cdot q_1 \cdot (q_1^{m.n} - 1)}{q_1 - 1}$

Diese Formel ergibt sich aus der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26, wenn man berücksichtigt, dass in derselben für diesen Fall nach voriger Antwort

$$w = \frac{r\,(q_1^{m.n} - 1)}{q_1^{m.n-1} \cdot (q_1 - 1)}$$

$q = q_1$ und

$n = m\,.\,n$ gesetzt werden muss.

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164.)

*). **Aufgabe 333.** Bei der Geburt eines Knaben will der Pate desselben eine solche Summe Geldes auf eine Rentenbank einzahlen, dass dieser Knabe, wenn er das Alter von 20 Jahren erreicht hat, 3 Jahre lang studieren und ausserdem seine Militärdienstzeit von 1 Jahr ableisten und zu diesem Zweck am Anfang eines jeden $\frac{1}{2}$ Jahres die Summe von 500 Mark beziehen kann. Welche Summe muss der Pate bei der Geburt des Knaben bar einzahlen, wenn der Zinsfuss $= 4\,\%$ beträgt?

Formel 1ª: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

Formel 32: $$w = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1}}$$

Auflösung. Die gesuchte Summe x, welche der Pate bei der Geburt des Knaben auf Zinseszinsen legte, ist bis zu der Zeit, in welcher der Knabe sein 20. Lebensjahr erreicht, nach vorstehender Formel 1ª angewachsen zu:

a). . . . $K = x\,.\,1{,}04^{20}$

Von diesem Zeitpunkte bezieht der Knabe 4 Jahre lang am Anfang eines jeden $\frac{1}{2}$ Jahres die Summe von 500 ℳ. Setzt man in vorstehender Formel 32:

$r = 500$

$n = 4$

$m = 2$ und

$p = 4$, also $\frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2$

so erhält man für den baren Wert w dieser gedachten vorschüssigen $\frac{1}{2}$jährigen Rente zur Zeit als der Knabe sein 20. Lebensjahr erreicht hatte, die Relation:

b). . . $$w = \frac{500\,(1{,}02^{2.4} - 1)}{0{,}02\,.\,1{,}02^{2.4-1}}$$

Da nun für jenen Zeitpunkt die gegenseitigen Leistungen einander gleich sein müssen, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $$x\,.\,1{,}04^{20} = \frac{500\,(1{,}02^{2.4} - 1)}{0{,}02\,.\,1{,}02^{2.4-1}}$$

Hülfsrechnungen:

1). $log\,1{,}02^8 = 8 \,.\, log\,1{,}02$

Nun ist: $log\,1{,}02 = 0{,}0086001718$
$.\,8$

$log\,1{,}02^8 = 0{,}0688013744$

oder: $= 0{,}0688014$

7794
220
185
35
33,3

mithin ist:
$1{,}02^8 = 1{,}171659$

2). . . $log\,1{,}02 = 0{,}0086001718$
$.\,7$

$0{,}0602012026$

$+\,20\,.\,log\,1{,}04 = +0{,}3406667860$ (s. Hülfsr.3)

$7\,.\,log\,1{,}02 + 20\,.\,log\,1{,}04 = 0{,}4008679886$

oder: $= 0{,}4008690$

3). . . $log\,1{,}04 = 0{,}0170333393$
$.\,20$

$20\,.\,log\,1{,}04 = 0{,}3406667860$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$x \,.\, 1{,}04^{20} = \frac{25000\,(1{,}02^8 - 1)}{1{,}02^7}$$

$$x = \frac{25000\,(1{,}02^8 - 1)}{1{,}02^7 \,.\, 1{,}04^{20}}$$

$$x = \frac{25000\,(1{,}171659 - 1)}{1{,}02^7 \,.\, 1{,}04^{20}} \text{ (siehe Hülfsr 1()}$$

oder:

$$x = \frac{25000 \,.\, 0{,}171659}{1{,}02^7 \,.\, 1{,}04^{20}}$$

Durch Logarithmierung ergibt sich hieraus:

$$log\,x = log\,25000 + log\,0{,}171659 - (7\,.\,log\,1{,}02 + 20\,.\,log\,1{,}04)$$

Nun ist:

$log\,0{,}171659 = 0{,}2346438 - 1$
$+\,227{,}7$

$0{,}2346666 - 1$

$+\,log\,25000 = 4{,}3979400$

$4{,}6326066 - 1$

$-\,(7\,.\,log\,1{,}02 + 20\,.\,log\,1{,}04) = -\,0{,}4008680$ (s. Hülfsr.2)

$log\,x = 4{,}2317386 - 1$

oder: $log\,x = 3{,}2317386$

7244
142
153

mithin ist:
$x = 1705{,}06$

Der Pate hat somit bei der Geburt des Knaben die Summe von 1705 Mark und 6 pf. an die Bank zu zahlen.

Aufgabe 334. Wie lange muss jemand
a). zu Anfang eines jeden Jahres,
b). zu Ende eines jeden Jahres,
400 Mark an eine Rentenanstalt zahlen, damit er später 16 Jahre hindurch eine halbjährliche Rente von 1200 Mark beziehen kann, wenn $5^0/_0$ gerechnet werden?

Formel 29: $$W = \frac{r\,.\,1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Formel 30: $$w = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}$$

Formel 27: $$W = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung des 1. Teils der Aufgabe.

Zahlt jemand x Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres 400 Mark an eine Rentenanstalt ein, so ist der Endwert W dieser vorschüssigen Zahlungen nach vorstehender Formel 29:

a). . . $$W = \frac{400\,.\,1{,}05\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05}$$

Bezieht er vom Ende des x^{ten} Jahres ab, in den folgenden 16 Jahren eine nachschüssige halbjährige Rente von 1200 Mark, so ist nach vorstehender Formel 30, wenn man in derselben:

$$r = 1200$$
$$n = 16$$
$$m = 2 \text{ und}$$
$$p = 5, \text{ also } \frac{p}{m} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

setzt, der bare Wert w dieser Rente zu jener Zeit, nämlich am Anfang des $(x+1)^{\text{ten}}$ Jahres:

$$w = \frac{1200\,(1{,}025^{2 \cdot 16} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{2 \cdot 16}}$$

oder:

$$\text{b). . .}\quad w = \frac{1200\,(1{,}025^{32} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1025^{32}}$$

Da am Ende des x^{ten} oder am Anfang des $(x+1)^{\text{ten}}$ Jahres die gegenseitigen Leistungen gleich sein müssen, so besteht für x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{1). .}\quad \frac{400 \,.\, 1{,}05\,(1{,}05^{x} - 1)}{0{,}05} = \frac{1200\,(1{,}025^{32} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{32}}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x, bezw. zunächst nach $1{,}05^{x}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{40000 \,.\, 1{,}05\,(1{,}05^{x} - 1)}{5} = 26219 \quad \text{(s. Hülfsrechn. 1)}$$

$$8000 \,.\, 1{,}05\,(1{,}05^{x} - 1) = 26219$$

$$1{,}05^{x} - 1 = \frac{26219}{8000 \,.\, 1{,}05} = \frac{26219}{8400} = 3{,}121309$$

$$1{,}05^{x} = 3{,}121309 + 1$$

oder:

$$1{,}05^{x} = 4{,}121309$$

Durch Logarithmierung erhält man:

$$x \,.\, \log 1{,}05 = \log 4{,}121309$$

$$x = \frac{\log 4{,}121309}{\log 1{,}05} \quad \text{(siehe Hülfsrechn. 4)}$$

$$x = \frac{0{,}6150352}{0{,}0211893} = \frac{6150352}{211893}$$

oder nach einfacher Division:

$$x = 29{,}926$$

Die betreff. Person muss also 29,026 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres die Summe von 400 Mark einzahlen, d. h. sie muss 29 Jahre lang die Summe von 400 Mark, am Anfang des letzten Jahres aber noch eine wei-

Hülfsrechnungen:

$$\text{1).}\quad w = \frac{1200\,(1{,}025^{32} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{32}}$$

$$= \frac{1200 \,.\, (2{,}203757 - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{32}} \quad \text{(siehe Hülfsr. 2)}$$

$$= \frac{1200 \,.\, 1{,}203757}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{32}}$$

Logarithmiert, gibt:

$$\log w = \log 1200 + \log 1{,}203757 - (\log 0{,}025 + 32 \,.\, \log 1{,}025)$$

Nun ist:

$$
\begin{array}{rcl}
\log 1{,}203757 & = & 0{,}0805183 \\
 & & +180 \\
 & & +\ \ 25 \\
\hline
 & & 0{,}0805388 \\
+\log 1200 & = & +3{,}0791812 \\
\hline
 & & 3{,}1597200 \\
-(\log 0{,}025 + 32 \,.\, \log 1{,}025) & = & +0{,}7411037 - 2 \ \text{(s. Hlfs-rechn. 3)} \\
 & & -\qquad\qquad + \\
\hline
\log w & = & 2{,}4186163 + 2 \\
\text{oder:} & = & 4{,}4186163 \\
 & & 6161 \\
\hline
 & & 2
\end{array}
$$

mithin:

$$w = 26219$$

$$\text{2).}\quad \log 1{,}025^{32} = 32 \,.\, \log 1{,}025$$

Nun ist:

$$
\begin{array}{rcl}
\log 1{,}025 & = & 0{,}0107238654 \ \text{(s. Hlfs-taf. II)} \\
 & & .\,32 \\
\hline
 & & 214477308 \\
 & & 321715962 \\
\hline
32 \,.\, \log 1{,}025 & = & 0{,}3431636928 \\
\text{oder:}\ \log 1{,}025^{32} & = & 0{,}3431637 \\
 & & 1525 \\
\hline
 & & 112 \\
 & & 98{,}5 \\
\hline
 & & 13{,}5 \\
 & & 13{,}7
\end{array}
$$

mithin:

$$1{,}025^{32} = 2{,}203757$$

tere Summe zahlen, welche jenem Jahresbruchteil $\frac{26}{1000}$ entspricht. Die Berechnung dieser Summe geschieht analog wie in der Aufgabe 330 gezeigt wurde.

Auflösung des 2. Teils der Aufgabe.

Zahlt jemand x Jahre lang, am Ende eines jeden Jahres 400 Mark in eine Rentenanstalt ein, so ist der Endwert W_1 dieser nachschüssigen Zahlungen bis zu Ende des x^{ten} Jahres nach vorstehender Formel 27:

$$\text{c)}. \quad . \quad . \quad W_1 = \frac{400\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05}$$

Bezieht er vom Ende des x^{ten} Jahres ab in den folgenden 16 Jahren eine nachschüssige halbjährige Rente von 1200 Mark, so ist nach vorstehender Formel 30, wenn man in derselben:

$r = 1200$

$n = 16$

$m = 2$ und

$p = 5$, also $\frac{p}{m} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

setzt, der bare Wert w dieser Rente zu jener Zeit, nämlich am Anfang des $(x+1)^{ten}$, bezw. am Ende des x^{ten} Jahres:

$$w = \frac{1200\,(1{,}025^{2 \cdot 16} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{2 \cdot 16}}$$

oder:

$$\text{d)}. \quad . \quad . \quad w = \frac{1200\,(1{,}025^{32} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{32}}$$

Da am Ende des x^{ten} oder am Anfang des $(x+1)^{ten}$ Jahres die gegenseitigen Leistungen gleich sein müssen, so besteht für x die Bestimmungsgleichung:

$$2). \quad . \quad . \quad \frac{400\,(1{,}05^x - 1)}{0{,}05} = \frac{1200\,(1{,}025^{32} - 1)}{0{,}025 \,.\, 1{,}025^{32}}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x, bezw. zunächst nach $1{,}05^x$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{40000\,(1{,}05^x - 1)}{5} = 26219 \quad \text{(siehe Hülfsrechn. 1)}$$

$$8000\,(1{,}05^x - 1) = 26219$$

$$1{,}05^x - 1 = \frac{26219}{8000} = 3{,}27737$$

$$1{,}05^x = 3{,}27737 + 1$$

oder:

$$1{,}05^x = 4{,}27737$$

Hülfsrechnungen:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad log\,0{,}025 = 0{,}3979400 - 2$$
$$+ 32 \,.\, log\,1{,}025 = +0{,}3431637$$
$$0{,}7411037 - 2$$

$$4). \quad . \quad . \quad log\,4{,}121309 = 0{,}6150342$$
$$+ 9{,}5$$
$$0{,}6150352$$

$$5). \quad . \quad . \quad log\,4{,}27737 = 0{,}6311697$$
$$+ 71$$
$$0{,}6311768$$

Durch Logarithmierung erhält man:

$$x \cdot log\, 1{,}05 = log\, 4{,}27737$$

$$x = \frac{log\, 4{,}27737}{log\, 1{,}05} \quad \text{(siehe Hülfsrechn. 5)}$$

$$x = \frac{0{,}6311768}{0{,}0211893} = \frac{6311768}{211893}$$

oder nach einfacher Division:

$$x = 29{,}788$$

Die betreff. Person muss also 29,788 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres die Summe von 400 Mark einzahlen, d. h. sie muss 29 Jahre lang die Summe von 400 Mark, am Ende des letzten Jahres aber noch eine weitere Summe zahlen, welche jenem Jahresbruchteil $\frac{788}{1000}$ Jahr entspricht. Die Berechnung dieser Summe geschieht analog wie in der Aufgabe 330 gezeigt wurde.

5). Entwicklung der Rentenformeln für eine nachschüssige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

Frage 44. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer nachschüssigen Rente, deren Raten r alle b Jahre fällig sind, mit w, die Anzahl der Jahre mit n, also die Anzahl der Rentenbezüge mit $\frac{n}{b}$ und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel, unter der Voraussetzung, dass n durch b ohne Rest teilbar ist (siehe Erkl. 196):

Formel 34 $$w = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n(1{,}0p^b - 1)}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 34ᵃ $$w = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q^b - 1)}$$

Diese Formel kann man, analog wie die Formeln 25 u. 30, wie folgt herleiten:

Der bare Wert der zu Ende des b^{ten} Jahres fälligen 1. Rate r ist (siehe Erkl. 29, bezw. Erkl. 11 in der 1. Auflage) $= \frac{r}{q^b}$

der bare Wert der zu Ende des $2.b^{\text{ten}}$ Jahres fälligen 2. Rate r ist $= \frac{r}{q^{2b}}$

der bare Wert der zu Ende des $3.b^{\text{ten}}$ Jahres fälligen 3. Rate r ist $= \frac{r}{q^{3b}}$ u. s. f.

Aus der Analogie dieser gefundenen Barwerte ergibt sich, dass der bare Wert der zu Ende des n^{ten} Jahres fälligen letzten, oder $\frac{n}{b}^{\text{ten}}$ Rate $r = \frac{r}{q^{\frac{n}{b}\cdot b}}$ oder $= \frac{r}{q^n}$ ist.

Erkl. 196. In dem Falle, in welchem n durch b nicht ohne Rest teilbar ist, bestimme man zuerst den baren Wert der Rentenbezüge, welche bis zu Ende des letzten der Termine von je b Jahren fällig sind. Dann berechne man den Barwert des für den Rest der n Jahre zahlbaren Rentenbezugs. Die Summe der beiden somit gefundenen Barwerte ist gleich dem Barwert der ganzen Rente. — (Siehe die Aufgabe 338.)

Für den baren Wert w der ganzen Rente besteht somit die Gleichung:

$$1)\ldots\; w = \frac{r}{q^b} + \frac{r}{q^{2b}} + \frac{r}{q^{3b}} + \cdots\cdots \frac{r}{q^n}$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe ist (siehe Erkl. 42 der 2. Auflage),

deren Anfangsglied $a = \frac{r}{q^b}$

„ Quotient $q = \frac{1}{q^b}$ und

„ letztes Glied $t = \frac{r}{q^n}$ ist,

so erhält man nach der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 41 der 2. Aufl.)}$$

$$w = \frac{\frac{r}{q^n}\cdot\frac{1}{q^b} - \frac{r}{q^b}}{\frac{1}{q^b} - 1} = \frac{\frac{r}{q^{n+b}} - \frac{r}{q^b}}{\frac{1 - q^b}{q^b}}$$

$$= \frac{r - r\cdot q^n}{q^{n+b}} : \frac{1 - q^b}{q^b} = \frac{r(1 - q^n)\cdot q^b}{q^{n+b}(1 - q^b)}$$

$$= \frac{r(1 - q^n)}{q^n(1 - q^b)}$$

oder Zähler und Nenner mit -1 multipliziert:

$$w = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q^b - 1)}$$

und dies ist vorstehende Formel 34^a, aus welcher sich, für $q = 1{,}0p$ gesetzt, Formel 34 ergibt.

Frage 45. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen oder Endwerts einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer nachschüssigen Rente, deren Raten r alle b Jahre fällig sind, mit W, die Anzahl der Jahre

mit n, also die Anzahl der Rentenbezüge mit $\frac{n}{b}$ und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel, unter der Voraussetzung, dass n durch b ohne Rest teilbar ist (siehe Erkl. 197):

Formel 35 $$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 35ª $$W = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^b - 1}$$

Erkl. 197. In dem Falle, in welchem n durch b nicht ohne Rest teilbar ist, bestimmt man zuerst nach nebenstehender Formel den künftigen Wert der Rentenbezüge r, bis zu dem Zeitpunkt, an welchem die letzte Rente fällig ist und berechnet dann, zu welcher Summe dieser Endwert noch während des Restes der n Jahre, welcher nicht mehr gleich dem vollen Termin von b Jahren ist, mit seinen Zinsen und Zinseszinsen anwächst.
(Siehe die gelöste Aufgabe 338.)

Diese Formel kann man wie folgt herleiten:

Mit Benutzung der in der Erkl. 176 entwickelten Formel 26:

$$W = w \cdot 1{,}0p^n$$

ergibt sich mit Benutzung der Formel 34 vorstehende Formel 35, indem hiernach:

$$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n\,(1{,}0p^b - 1)} \cdot 1{,}0p^n$$

oder:

$$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1} \text{ ist.}$$

6). Entwicklung der Rentenformeln für eine **vorschüssige** Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

Frage 46. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Erkl. 198. Ist n nicht durch b ohne Rest teilbar, so hat man in analoger Weise zu verfahren, wie dies in den Erkl. 196 und 197 angegeben ist.

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer vorschüssigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit w, den Zinsfuss mit p und die Anzahl der Jahre, welche angibt wie lange die Rente läuft, mit n, so ist unter der Voraussetzung, dass n durch b ohne Rest teilbar ist (siehe Erkl. 198), dass also die Anzahl der Rentenbezüge $= \frac{n}{b}$ ist, die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 36 $$w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 36ª $$w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-b} \cdot (q^b - 1)}$$

Erkl. 199. Wird eine Rente n Jahre lang am Anfang eines jeden b^{ten} Jahres ausgezahlt, so ist die Anzahl der Rentenbezüge $= \frac{n}{b}$, vorausgesetzt, dass n durch b ohne Rest teilbar ist.

Da der letzte, der $\left(\frac{n}{b}\right)^{\text{te}}$ Rentenbezug am Anfang der letzten b Jahre fällig ist, so ist, vom Beginn der Rente ab gerechnet, derselbe nach $(n - b)$ Jahren fällig.

Diese Formel kann man folgendermassen herleiten:

Der bare Wert der am Anfang des 1. Jahres fälligen Rate r ist $= r$; der bare Wert der 2., am Ende des b^{ten}, bezw. am Anfang des $(b+1)^{\text{ten}}$ Jahres fälligen Rate r ist (siehe Erkl. 29, bezw. Erkl. 11 in der 1. Auflage) $= \frac{r}{1{,}0p^b}$; der bare Wert der 3., am Ende des $2b^{\text{ten}}$, bezw. am Anfang des $(2b+1)^{\text{ten}}$ Jahres fälligen Rate r ist $= \frac{r}{1{,}0p^{2b}}$; der bare Wert der 4., am Ende des $3b^{\text{ten}}$ Jahres fälligen Rate r ist $= \frac{r}{1{,}0p^{3b}}$ u. s. f.

Aus der Analogie dieser gefundenen Barwerte ergibt sich, dass der bare Wert der letzten, der $\left(\frac{n}{b}\right)^{\text{ten}}$ am Ende des $(n-b)^{\text{ten}}$ Jahres (siehe Erkl. 199), bezw. am Anfang des $(n - b + 1)^{\text{ten}}$ Jahres fälligen Rate $r = \frac{r}{1{,}0p^{n-b}}$ ist.

Für den baren Wert der ganzen Rente besteht somit die Gleichung:

$$1). \ldots \quad w = r + \frac{r}{1{,}0p^b} + \frac{r}{1{,}0p^{2b}} + \frac{r}{1{,}0p^{3b}} + \cdots \frac{r}{1{,}0p^{n-b}}$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe ist (siehe Erkl. 40, der 2. Auflage),

deren Anfangsglied $a = r$

„ Quotient $q = \frac{1}{1{,}0p^b}$

und „ letztes Glied $t = \frac{r}{1{,}0p^{n-b}}$ ist,

so erhält man nach der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \text{ (siehe Erkl. 41 der 2. Aufl.)}$$

$$w = \frac{\frac{r}{1{,}0p^{n-b}} \cdot \frac{1}{1{,}0p^b} - r}{\frac{1}{1{,}0p^b} - 1} = \frac{\frac{r}{1{,}0p^n} - r}{\frac{1 - 1{,}0p^b}{1{,}0p^b}}$$

$$w = \frac{r - r \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n} : \frac{1 - 1{,}0p^b}{1{,}0p^b} = \frac{r \,.\, (1 - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^{n-b} \,.\, (1 - 1{,}0p^b)}$$

oder:

$$w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

und dies ist vorstehende Formel 36.

Frage 47. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen Wertes einer vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind, mit W, und haben die Buchstaben r, p und n dieselbe Bedeutung wie in voriger Antwort angegeben, so ist unter der Voraussetzung, dass n durch b ohne Rest teilbar ist (siehe Erkl. 198), die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 37 $$W = \frac{r \cdot 1{,}0p^b \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 37[a] $$W = \frac{r \cdot q^b \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1}$$

Diese Formel ergibt sich aus der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26:

$$W = w \cdot 1{,}0p^n$$

wenn man berücksichtigt, dass für den vorstehenden Fall

$$w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)} \quad \text{(s. Formel 36)}$$

gesetzt werden muss.

Man erhält:

$$W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)} \cdot 1{,}0p^n$$

oder:

$$W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1} \cdot 1{,}0p^{n-(n-b)}$$

und hiernach:

$$W = \frac{r \cdot 1{,}0p^b \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$$

nämlich vorstehende Formel 37.

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164)

*). **Aufgabe 335.** Jemand bezieht 24 Jahre lang am Ende eines jeden 3. Jahres eine Rente von 2400 Mark. Welches ist der bare Wert dieser Rente, wenn der Zinsfuss = 4 % beträgt?

Formel 34: $$w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n\,(1{,}0p^b - 1)}$$

Auflösung. Da die Raten der Rente alle 3 Jahre fällig sind, und da sich ein solcher Termin ohne Rest in die Anzahl 24 der Jahre dividieren lässt, welche angibt, wie lange die Rente be-

Hülfsrechnungen:

1). $log\,1{,}04^{24} = 24 . log\,1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} log\,1{,}04 & = & 0{,}0170333393 \text{ (s. Hülfstafel II)} \\ & & .\,24 \\ \hline & & 681333572 \\ & & 340666786 \\ \hline log\,1{,}04^{24} & = & 0{,}4088001432 \\ \text{oder} & = & 0{,}4088001 \\ & & 7994 \\ \hline & & 7 \\ & & 6{,}8 \end{array}$$

mithin:

$1{,}04^{24} = 2{,}563304$

(siehe auch Hülfstafel I.)

2). $log\,1{,}04^{3} = 3 . log\,1{,}04$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist: } log\,1{,}04 & = & 0{,}0170333 \\ & & .\,3 \\ \hline log\,1{,}04^{3} & = & 0{,}0510999 \\ & & 0753 \\ \hline & & 246 \\ & & 231{,}6 \\ \hline & & 14{,}4 \\ & & 15{,}4 \end{array}$$

mithin:

$1{,}04^{3} = 1{,}124864$

3). . . . $log\,0{,}124864 = 0{,}0964233 - 1$

$$\begin{array}{rcl} & & +\,139 \\ +\,24 . log\,1{,}04 & = & 0{,}4088001 \text{ (s. Hülfsrechn. 1)} \\ \hline (24 . log 1{,}04 + log 0{,}124864) & = & 0{,}5052373 - 1 \end{array}$$

zogen wird, so kommt vorstehende Formel 34 in Anwendung.

Setzt man in derselben:

$$w = x$$
$$r = 2400$$
$$p = 4 \quad \text{und}$$
$$b = 3$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $x = \dfrac{2400\,(1{,}04^{24} - 1)}{1{,}04^{24}\,(1{,}04^{3} - 1)}$

Hieraus ergibt sich x, wie folgt:

$$x = \frac{2400 . (2{,}563304 - 1)}{1{,}04^{24}\,(1{,}124864 - 1)} \text{ (siehe die Hülfsrechn. 1 u. 2)}$$

$$x = \frac{2400 . 1{,}563304}{1{,}04^{24} . 0{,}124864}$$

$$log\,x = log\,2400 + log\,1{,}563304 - (24 . log\,1{,}04 + log\,0{,}124864)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} log\,1{,}563304 & = & 0{,}1940423 \\ & & +\,11{,}1 \\ +\,log\,2400 & = & 3{,}3802112 \\ \hline & & 3{,}5742546 \\ -\,(24 . log\,1{,}04 + log\,0{,}124864) & = & +0{,}5052373 - 1 \text{ (s. Hülfsrechn. 3)} \\ & & - \quad + \\ \hline log\,x & = & 3{,}0690173 + 1 \\ \text{oder:} & = & 4{,}0690173 \\ & & 0017 \\ \hline & & 156 \\ & & 148{,}4 \\ \hline & & 7{,}6 \\ & & 7{,}1 \end{array}$$

mithin:

$numlog\,x = 11722{,}42$

Der gesuchte Barwert ist somit $=$ 11722 Mark 42 pf.

*). **Aufgabe 336.** Jemand bezieht 30 Jahre lang eine Rente, deren Raten am Ende jedes 3. Jahres fällig sind und je 500 Mark betragen. Welches ist der Endwert dieser Rente, wenn der Zinsfuss $= 3\frac{1}{2}\,\%$ ist?

Formel 35: $W = \dfrac{r\,(1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{b} - 1}$

Auflösung. Da die Raten der Rente alle 3 Jahre fällig sind, und da sich ein solcher Termin ohne Rest in die Zahl 30 der Jahre dividieren lässt, welche angibt wie lange die Rente bezogen wird, so kommt vorstehende Formel 35 in Anwendung. Setzt man in derselben:

$$W = x$$
$$r = 500$$
$$p = 3\tfrac{1}{2} = 3{,}5, \text{ also } 1{,}0p = 1{,}035$$
$$n = 30 \quad \text{und}$$
$$b = 3$$

Hülfsrechnungen:

1). $log\,1{,}035^{30} = 30 . log\,1{,}035$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} log\,1{,}035 & = & 0{,}0149403498 \text{ (s. Hülfstafel II)} \\ & & .\,30 \\ \hline log\,1{,}035^{30} & = & 0{,}4482104940 \end{array}$$

oder $= 0{,}4482105$

1960 | 145 | 139,5 | 5,5 | 6,2

mithin:

$1{,}035^{30} = 2{,}806794$

2). $\log 1{,}035^3 = 3 \,.\, \log 1{,}035$

Nun ist:

$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$
$.\,3$

$\log 1{,}035^3 = 0{,}0448209$

8140 | 69 | 39,2 | 29,8 | 31,3

mithin:

$1{,}035^3 = 1{,}108718$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $x = \dfrac{500\,(1{,}035^{30} - 1)}{1{,}035^3 - 1}$

Hieraus ergibt sich x wie folgt:

$$x = \frac{500\,(2806794 - 1)}{1{,}108718 - 1}$$ (siehe die Hülfsrechn. 1 u. 2)

$$x = \frac{500 \,.\, 1{,}806794}{0{,}108718}$$

$$x = \frac{903{,}397}{0{,}108718} = \frac{903397000}{108718}$$

und nach einfacher Division:

$$x = 8309{,}54$$

Der gesuchte Endwert ist somit $=$ 8309 Mark 54 pf.

*). **Aufgabe 337.** Eine Gemeinde nimmt ein zu $4\frac{1}{2}$ % verzinsliches Anlehen von 500 000 Mark auf und bezahlt davon 5 mal nach je 5 Jahren 100 000 Mark. Welches ist der nach weiteren 5 Jahren zu zahlende Rest?

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}045^{25} = 25 \,.\, \log 1{,}045$

Nun ist:

$\log 1{,}045 = 0{,}0191162904$ (s. Hülfstaf. II)
$.\,25$

955814520
382325808

$\log 1{,}045^{25} = 0{,}4779072600$

oder: $= 0{,}4779073$

9023 | 50 | 43,2 | 6,8 | 7,2

mithin:

$1{,}045^{25} = 3{,}005435$

2). $\log 1{,}045^5 = 5 \,.\, \log 1{,}054$

Nun ist:

$\log 1{,}045 = 0{,}0191163$
$.\,5$

$\log 1{,}045^5 = 0{,}0955815$

5529 | 286 | 278,4 | 7,6 | 6,9

mithin:

$1{,}045^5 = 1{,}246182$

Formel 1ᵃ: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

" 35: $W = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$

Auflösung. Bezeichnet man den Wert des Anlehens nach 25 Jahren mit y, den Wert der bis dahin gemachten Abzahlungen mit z, so hat man für den gesuchten Rest x, welcher von da ab nach weiteren 5 Jahren zu zahlen ist, mit Benutzung der obigen Formel 1ᵃ, wenn man in derselben:

$K = x$
$k = y - z$
$p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$, also $1{,}0p = 4{,}5$
und $n = 5$ setzt, die Beziehung:

1). . . $x = (y - z) \,.\, 1{,}045^5$

Für den Wert y des Anlehens nach den ersten 25 Jahren findet man mittels Anwendung der obigen Formel 1ᵃ, wenn man in derselben:

$K = y$
$k = 500\,000$
$p = 1{,}045$ und
$n = 25$ setzt:

2). . . $y = 500\,000 \,.\, 1{,}045^{25}$

Für den Wert z der 5 mal nach je 5 Jahren, also 25 Jahre lang, gemachten Abzahlungen von je 100 000 Mark

hat man am Ende des 25. Jahres nach obiger Formel 35, wenn man in derselben:

$$W = z$$
$$r = 100\,000$$
$$1{,}0p = 1{,}045$$
$$n = 25 \text{ und}$$
$$b = 5 \text{ setzt:}$$

$$3)\ldots z = \frac{100\,000\,.\,(1{,}045^{25}-1)}{1{,}045^{5}-1}$$

Aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$4)\ldots x = \left(500000\,.\,1{,}045^{25} - \frac{100000\,(1{,}045^{25}-1)}{1{,}045^{5}-1}\right).\,1{,}045^{5}$$

Hieraus ergibt sich x wie folgt:

$$x = 1{,}246182\,.\left(500000\,.\,3{,}005435 - \frac{100000\,(3{,}005435-1)}{1{,}246182-1}\right)$$

(siehe die Hülfsrechn. 1 und 2)

$$x = 1{,}246182\,.\left(1502717{,}5 - \frac{100000\,.\,2{,}005435}{0{,}246182}\right)$$

$$x = 1{,}246182\,.\left(1502717{,}5 - \frac{200543{,}5}{0{,}246182}\right)$$

$$x = 1{,}246182\,.\,(1502717{,}5 - 814614{,}80)$$

$$x = 1{,}246182\,.\,688102{,}7$$

$$x = 857501{,}20$$

Am Ende des 30. Jahres ist somit ein Rest von 857501 ℳ 20 pf. zu zahlen.

*). **Aufgabe 338.** Jemand bezieht eine Rente, deren Raten von je 800 Mark am Ende eines jeden 4. Jahres fällig sind und legt die erhaltenen Raten sofort wieder auf Zinseszinsen zu 5 % an.

Wie gross wird der Wert aller der empfangenen Rentenbezüge am Ende des 30. Jahres sein?

Formel 1^a: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

„ 35: $W = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n-1)}{1{,}0p^b-1}$

Auflösung. Bezeichnet man den gesuchten Wert aller der Rentenbezüge bis zu Ende des 30. Jahres mit x, und berücksichtigt man, dass die Rentenbezüge alle 4 Jahre fällig sind, dass also in dem Zeitraum von jenen 30 Jahren eine alle 4 Jahre fällige Rente zur Auszahlung gelangt, welche 28 Jahre läuft, und dass somit der gesuchte Endwert x gleich dem Werte ist, welchen man erhält, wenn man den Endwert y dieser Rente noch 2 weitere Jahre zu 5 % auf Zinseszinsen stehen lässt, so erhält man nach vorstehender Formel 1^a die Gleichung:

1). . . . $x = y \cdot 1{,}05^2$

Setzt man zur Bestimmung des Endwerts y jener gedachten Rente in vorstehende Formel 35:

$$W = y$$
$$r = 800$$
$$p = 5$$
$$n = 28 \text{ und}$$
$$b = 4$$

so erhält man ferner:

2). . . $y = \frac{800 \cdot (1{,}05^{28} - 1)}{1{,}05^4 - 1}$

Aus den Gleichungen 1). u. 2). erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

3). . . $x = \frac{800 \cdot (1{,}05^{28} - 1)}{1{,}05^4 - 1} \cdot 1{,}05^2$

Hieraus findet man x wie folgt:

$$x = \frac{800 \cdot (3{,}92013 - 1)}{1{,}215506 - 1} \cdot 1{,}05^2$$

(siehe Hülfsrechn. 1 u. 2)

$$x = \frac{800 \cdot 2{,}92013}{0{,}215506} \cdot 1{,}05^2$$

$$\log x = \log 800 + \log 2{,}92013 + 2 \cdot \log 1{,}05 - \log 0{,}215506$$

Nun ist: $\log 2{,}92013 = 0{,}4653977$
$+45$
$0{,}4654022$
$+\log 800 = +2{,}9030900$
$+2 \cdot \log 1{,}05 = 2 \cdot 0{,}0211893 = +0{,}0423786$
$3{,}4108708$
$-\log 0{,}215506 = \pm 0{,}3334594 \mp 1$
$\log x = 3{,}0774114 + 1$
oder $= 4{,}0774114$
4042
72
72,7

mithin:
$x = 11951{,}2$

Die Rente ist somit am Ende des 30. Jahres = 11951 ℳ 20 pf. wert.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}05^{28} = 28 \cdot \log 1{,}05$

Nun ist:
$\log 1{,}05 = 0{,}0211892991$ (s. Hülfstaf. II)
$\cdot 28$
1695143928
423785982
$\log 1{,}05^{28} = 0{,}5933003748$
oder $= 0{,}5933004$
2971
33
33,3

mithin:
$1{,}05^{28} = 3{,}92013$

2). $\log 1{,}05^4 = 4 \cdot \log 1{,}05$

Nun ist:
$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\cdot 4$
$\log 1{,}05^4 = 0{,}0847572$
7550
22
21,4

mithin:
$1{,}05^4 = 1{,}215506$

3). . . $\log 0{,}215506 = 0{,}3334473 - 1$
$+121$
$0{,}3334594 - 1$

7). Entwicklung der Rentenformeln für **aufgeschobene** Jahresrenten.

Frage 48. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente? (siehe Erkl. 200.)

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente, welche erst vom Ende des a^{ten} Jahres ab beginnt, mit w, die jährlichen Raten mit r, die Zahl der Jahre, welche an-

Erkl. 200. Eine um a Jahre aufgeschobene nachschüssige Jahresrente ist eine solche, deren 1. Rate am Ende des $(a+1)^{ten}$ Jahres fällig ist.

gibt wie lange die Rente zu laufen hat, bezw. welche angibt, wie oft die Rente bezogen wird, mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 38 $$w = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, d. h. $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 38a $$w = \frac{r(q^n - 1)}{(q-1) \cdot q^{a+n}}$$

Erkl. 201. Für den Wert w_1 der nachschüssigen Jahresrente hat man zur Zeit des Beginns derselben, also am Ende des a^{ten} Jahres nach der Formel 25:

1). . . $$w_1 = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$$

Ferner hat man nach der Erkl. 167 und nach der in der Erkl. 29, (bezw. nach der Erkl. 11 in der 1. Auflage) aufgestellten Formel:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

für den Barwert w jenes für die Zeit des Endes des a^{ten} Jahres berechneten Wertes w_1:

b). . . $$w = \frac{w_1}{1{,}0p^a}$$

Setzt man hierin den Wert für w_1 aus Gleichung a)., so erhält man:

$$w = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n \cdot 1{,}0p^a}$$

oder:

c). . . $$w = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}}$$

nämlich nebenstehende Formel 38.

Diese Formel kann man wie folgt herleiten:

Nach der Erkl. 167 und nach der in der Erkl. 29 (bezw. nach der Erkl. 11 in der 1. Aufl.) aufgestellten Formel ist, wenn man in derselben statt $1{,}0p$ den Buchstaben q einführt, der bare Wert der 1. am Ende des $(a+1)^{ten}$ Jahres fälligen Rate $r =$

$$\frac{r}{q^{a+1}}$$ (siehe Erkl. 200)

der bare Wert der 2. am Ende des $(a+2)^{ten}$ Jahres fälligen Rate $r =$

$$\frac{r}{q^{a+2}}$$

der bare Wert der 3. am Ende des $(a+3)^{ten}$ Jahres fälligen Rate $r =$

$$\frac{r}{q^{a+3}}$$ u. s. f.

Aus der Analogie dieser gefundenen Barwerte ergibt sich schliesslich, dass der bare Wert der n^{ten} (der letzten) am Ende des $(a+n)^{ten}$ Jahres fälligen Rate $r = \frac{r}{q^{a+n}}$ ist.

Für den Barwert w der ganzen Rente hat man somit die Gleichung:

1). . . $$w = \frac{r}{q^{a+1}} + \frac{r}{q^{a+2}} + \frac{r}{q^{a+3}} + \cdots \frac{r}{q^{a+n}}$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung eine geometrische Reihe ist (siehe Erkl. 40 der 2. Auflage),

deren Anfangsglied $a = \frac{r}{q^{a+1}}$

" Quotient $q = \frac{1}{q}$ und

" letztes Glied $t = \frac{r}{q^{a+n}}$ ist,

so erhält man nach der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

(siehe Erkl. 41 der 2. Auflage)

$$w = \frac{\frac{r}{q^{a+n}} \cdot \frac{1}{q} - \frac{r}{q^{a+1}}}{\frac{1}{q} - 1}$$

oder:

$$w = \frac{\frac{r}{q^{a+n+1}} - \frac{r}{q^{a+1}}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{\frac{r - r \cdot q^n}{q^{a+n+1}}}{\frac{1-q}{q}}$$

$$w = \frac{r - r q^n}{q^{a+n+1}} \cdot \frac{q}{1-q} = \frac{r - r q^n}{q^{a+n}(1-q)}$$

oder Zähler und Nenner mit -1 multipliziert und im Zähler den Faktor r ausgeschieden:

$$w = \frac{r(q^n - 1)}{(q-1) \cdot q^{a+n}}$$

und dies ist vorstehende Formel 38ᵃ, aus welcher sich, für $q = 1{,}0p$ gesetzt, die Formel 38 ergibt (siehe Erkl. 201).

Frage 49. Wie heisst die Formel zur Berechnung des Endwerts einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente, welche erst vom Ende des a^{ten} Jahres ab beginnt, mit W, die jährlichen Raten mit r, die Zahl der Jahre, welche angibt, wie lange die Rente zu laufen hat, bezw. welche angibt, wie oft die Rente bezogen wird, mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Erkl. 202. Beginnt die Rente erst nach Ablauf von a Jahren und läuft dieselbe n Jahre lang, so ist die ganze Dauer des beiderseitigen Rechtsverhältnisses $= (a + n)$ Jahr.

Formel 39 $$W = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, d. h. $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 39ᵃ $$W = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formel kann man folgendermassen herleiten:

Nach der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26 besteht zwischen der nach $(a+n)$ Jahren fälligen Summe W (siehe Erkl. 202) und dem baren Wert w derselben, die Relation:

a). . . . $W = w \cdot 1{,}0p^{a+n}$

Setzt man hierin für w den mittels der Formel 38, siehe vorige Antwort, gefundenen Wert:

Erkl. 203. Aus der Identität der Formeln 39 und 27 ergibt sich, dass der künftige Wert einer nachschüssigen Jahresrente, welche n mal bezogen wird, derselbe ist, einerlei ob dieselbe sofort oder erst vom Ende des a^{ten} Jahres ab bezogen wird.

$$\text{b}).\ .\ .\ w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+n}}$$

so erhält man aus Gleichung a).:

$$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+n}} \cdot 1{,}0p^{a+n}$$

oder:

$$\text{c}).\ .\ .\ W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

d. i. vorstehende Formel 39 (siehe Erkl. 203).

Frage 50. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente, welche erst vom Ende des a^{ten} Jahres ab beginnt, mit w, die jährlichen Raten mit r, die Zahl der Jahre, welche angibt wie lange die Rente zu laufen hat, bezw. welche angibt, wie oft die Rente bezogen wird, mit n, und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 40 $$w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+n-1}}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, d. h. $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 40[a] $$w = \frac{r\,(q^n - 1)}{(q-1)\,.\,q^{a+n-1}}$$

Diese Formel kann man wie die Formel 38, siehe Antwort der Frage 48, herleiten; man kann sie aber auch, analog wie in der Erkl. 201 gezeigt wurde, folgendermassen herleiten:

Für den Wert w_1 der vorschüssigen Jahresrente hat man zur Zeit des Beginns derselben, also am Ende des a^{ten} Jahres, nach der Formel 28:

$$\text{a}).\ .\ .\ .\ w_1 = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1}.\ 0{,}0p}$$

Ferner hat man nach der Erkl. 167 und nach der in der Erkl. 29 (bezw. nach der Erkl. 11 in der 1. Aufl.) aufgestellten Formel:

$$K = \frac{k}{1{,}0p^n}$$

für den Barwert w jenes für die Zeit des Endes des a^{ten} Jahres berechneten Wertes w_1:

$$\text{b}).\ .\ .\ .\ w = \frac{w_1}{1{,}0p^a}$$

Setzt man hierin den Wert für w_1 aus Gleichung a)., so erhält man:

$$w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^a}$$

oder:

$$\text{c)} \ldots\; w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}}$$

nämlich vorstehende Formel 40.

Frage 51. Wie heisst die Formel zur Berechnung des Endwerts einer aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente, welche erst vom Ende des a^{ten} Jahres ab beginnt, mit W, die jährlichen Raten mit r, die Zahl der Jahre, welche angibt wie lange die Rente zu laufen hat, bezw. welche angibt wie oft die Rente bezogen wird, mit n und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 41 $\ldots\ldots\; W = \dfrac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, d. h. $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 41ª $\ldots\ldots\; W = \dfrac{r \,.\, q\,(q^n - 1)}{q - 1}$

Diese Formel kann folgendermassen hergeleitet werden:

Nach der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26 besteht zwischen der nach $(a + n)$ Jahren fälligen Summe W (siehe Erkl. 202) und dem baren Wert w derselben, die Relation:

$$\text{a)} \ldots\; W = w \,.\, 1{,}0p^{a+n}$$

Setzt man hierin für w den mittels der Formel 40, siehe vor. Antw., gefundenen Wert:

$$\text{b)} \ldots\; w = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}}$$

so erhält man nach Gleichung a).:

$$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}} \,.\, 1{,}0p^{a+n}$$

oder:

$$W = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \,.\, 1{,}0p^{a+n-(a+n-1)}$$

und

$$W = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

nämlich vorstehende Formel 41 (siehe Erkl. 204).

Erkl. 204. Aus der Identität der Formeln 41 und 29 ergibt sich, dass der künftige Wert einer vorschüssigen Jahresrente, welche n mal bezogen wird, derselbe ist, einerlei ob derselbe sofort oder erst vom Ende des a^{ten} Jahres ab bezogen wird.

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164.)

*). **Aufgabe 339.** Wieviel kann man für eine Jahresrente von 3267,5714 Mark, welche nach Verlauf von 10 Jahren am Schlusse des folgenden Jahres zum 1. mal fällig ist und 20 mal gezahlt wird, bar bezahlen, wenn die Zinsen zu 4 % gerechnet werden und wenn dadurch weder dem Rentengeber noch dem Rentenempfänger ein Nachteil erwachsen soll?

Formel 38: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^{n} - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n}}$

Auflösung. Da in dieser Aufgabe der bare Wert x einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente gesucht ist, so hat man mit Benutzung der vorstehenden Formel 38, wenn man in derselben:

für den baren Wert $w = x$
„ die Rate $r = 3267{,}5714$
„ den Prozentsatz $p = 4$
„ die Dauer der Rente, bezw. die Zahl n, welche angibt, wie oftmals die Rente bezogen wird, $= 20$ und
für die Anzahl a der Jahre, welche angibt nach wieviel Jahren die Rente beginnt, $= 10$ setzt,

für x die Bestimmungsgleichung:

$$1)\ldots\; x = \frac{3267{,}5714 \,.\, (1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{10+20}}$$

Hieraus erhält man x, wie folgt:

$$x = \frac{326757{,}14 \,.\, (1{,}04^{20} - 1)}{4 \,.\, 1{,}04^{30}}$$

$$x = \frac{326757{,}14 \,.\, (2{,}191123 - 1)}{4 \,.\, 1{,}04^{30}}$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

$$x = \frac{326757{,}14 \,.\, 1{,}191123}{4 \,.\, 1{,}04^{30}}$$

$$\log x = \log 326757{,}14 + \log 1{,}191123 - (\log 4 + 30 \,.\, \log 1{,}04)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 326757{,}14 &= 5{,}5142156 \\
&\quad + 93{,}1 \\
&\quad + 1{,}3 \\
&\quad + 0{,}5 \\
&= 5{,}5142251 \\
+ \log 1{,}191123 &= 0{,}0759566 \text{ (s. Hülfsrechn. 2)} \\
&= 5{,}5901817 \\
- \log(4 + 30 \,.\, \log 1{,}04) &= -1{,}1130602 \text{ (s. Hülfsrechn. 3)} \\
\log x &= 4{,}4771215
\end{aligned}$$

1213
2
1,4

mithin:

$x = 30000{,}02$

Der bare Wert der Rente ist hiernach abgerundet = 30 000 Mark.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}04^{20} = 20 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 1{,}04 &= 0{,}0170333393 \text{ (s. Hülfstaf. II)} \\
&\quad .\, 20 \\
\log 1{,}04^{20} &= 0{,}3406667860 \\
\text{oder} &= 0{,}3406668
\end{aligned}$$

6622
46
39,6
6,4
5,9

mithin:

$1{,}04^{20} = 2{,}191123$

(siehe auch Hülfstaf. I)

2). . . $\log 1{,}191123 = 0{,}0759482$
$+ 73{,}0$
$+ 10{,}9$
$= 0{,}0759566$

3). $\log 4 + 30 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}6020600$
$+ 0{,}5110002$ (s. Hülfsr. 4)
$= 1{,}1130602$

4). . . $30 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}0170333393$
$.\, 30$
$= 0{,}5110001790$
oder $= 0{,}5110002$

Aufgabe 340. Ein Kapital k (= 150382,55 Mark) gewährt erst m (= 5) Jahre nach der Anlage einen jährlichen Ertrag von r (= 12000 Mark). Nach wieviel Jahren ist es durch die Summe dieser Erträge amortisiert (getilgt), wenn die Zinseszinsen zu p (= 4) % gerechnet werden?

Erkl. 205. Man hätte in nebenstehender Auflösung auch sagen können: Der Endwert der gedachten um 5 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Rente muss gleich dem Endwert des Kapitals k sein.

Erkl. 206. Um den Sinn der Aufgabe zu verstehen, denke man sich, es werde das Kapital k zum Betriebe eines Geschäftes gegeben, welches erst später einen jährlichen Ertrag abwirft, mittels welchem dieses Kapital, als Schuld betrachtet, getilgt (amortisiert) werden soll.

Hülfsrechnungen:

1). $z = 150382{,}55 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^5 = 1503{,}8255 \cdot 4 \cdot 1{,}04^5$

$\log z = \log 1503{,}8255 + \log 4 + 5 \cdot \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 1503{,}8255 & = & 3{,}1771901 \\ & & +57{,}8 \\ & & +14{,}5 \\ & & +1{,}4 \\ \hline & & 3{,}1771975 \\ +\log 4 & = & +0{,}6020600 \\ +5 \cdot \log 1{,}04 = 5 \cdot 0{,}0170333 & = & +0{,}0851665 \\ \hline \log z & = & 3{,}8644140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4102 \\ \hline 38 \\ 35{,}4 \\ \hline 2{,}6 \\ 2{,}4 \\ \hline 0{,}2 \end{array}$$

mithin ist: z oder $150382{,}55 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^5 = 7318{,}3644$

2). $\log 4681{,}64 = 3{,}6703943$

$$\begin{array}{r} 3{,}6703943 \\ 37{,}2 \\ \hline 3{,}6703980 \end{array}$$

Formel 38: $w = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}}$

Auflösung. Die jährlichen Erträge von je r, welche das Kapital k nach m Jahren gewährt, bilden von jetzt ab gerechnet die Raten einer um 5 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente, deren barer Wert bei gänzlicher Amortisation des Kapitals k gleich dem Kapital k selbst sein muss (siehe die Erkl. 205 u. 206).

Setzt man daher in vorstehender Formel 38:

für den baren Wert $w = k$
„ die Rate $r = r$
„ den Prozentsatz $p = p$
„ die Anzahl a der Jahre um welche die gedachte Rente aufgeschoben ist $= m$
und „ die unbekannte Anzahl n der Jahre, welche angibt wie lange die gedachte Rente läuft, bezw. für die unbekannte Zahl, welche angibt wie oftmals die jährlichen Erträge r stattfinden, $= y$

so erhält man für y die Bestimmungsgleichung:

1). . . $k = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^y - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{m+y}}$

Diese Gleichung nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$k = \frac{r \cdot (1{,}0p^y - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^m \cdot 1{,}0p^y}$$

$$k \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^m \cdot 1{,}0p^y = r \cdot 1{,}0p^y - r$$

$$1{,}0p^y \cdot (r - k \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^m) = r$$

$$1{,}0p^y = \frac{r}{r - k \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p}$$

$$y \cdot \log 1{,}0p = \log r - \log (r - k \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^m)$$

oder:

2). . . $y = \dfrac{\log r - \log (r - k \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^m)}{\log 1{,}0p}$

Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Jahre, nach welcher das Kapital k amortisiert ist, mit x, so findet man, da:

3). . . $x = y + m$ ist,

als allgemeine Lösung der Aufgabe:

A). . . $x = \dfrac{\log r - \log (r - k \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^m)}{\log 1{,}0p} + m$

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel hat man hiernach:

$$x = \frac{log\,12000 - log\,(12000 - 150382{,}55\,.\,0{,}04\,.\,1{,}04^5)}{log\,1{,}04} + 5$$

oder:

$$x = \frac{log\,12000 - log\,(12000 - 7318{,}36)}{log\,1{,}04} + 5$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

$$x = \frac{log\,12000 - log\,4681{,}64}{log\,1{,}04} + 5$$

$$x = \frac{4{,}0791812 - 3{,}6703980}{0{,}0170333} + 5 \quad \text{(s. Hülfsr. 2)}$$

$$x = \frac{0{,}4087832}{0{,}0170333} + 5 = 24 + 5 = 29$$

Somit ist nach 29 Jahren das betreffende Kapital amortisiert.

*). **Aufgabe 341.** Jemand will 21 Jahre hindurch zu Anfang eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf der 21 Jahre er selbst oder ein andrer 8 Jahre hindurch eine nachschüssige Jahresrente von 6000 ℳ geniessen kann. Wie gross muss jene jährlich zu zahlende Summe sein, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{2}\,\%$ berechnet werden?

Formel 28: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1}\,.\,0{,}0p}$

„ 38: $w = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+n}}$

Auflösung. Die am Anfang eines jeden Jahres einzuzahlende und gesuchte Summe x kann man als die Rate einer vorschüssigen Jahresrente betrachten, deren barer Wert gleich dem baren Wert der um 21 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente ist, welche sich die betreffende Person anschaffen will. Setzt man in vorstehender Formel 28:

für die Rate $r = x$
„ den Prozentsatz $p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$, also für $1{,}0p = 1{,}045$ und für $0{,}0p = 0{,}045$
„ die Anzahl n der Jahre, welche angibt wie lange die vorschüssige Rente läuft, $= 21$

so erhält man für den baren Wert w der gedachten Rente:

$$\text{a)}.\;.\;.\;w = \frac{x\,(1{,}045^{21} - 1)}{0{,}045\,.\,1{,}045^{21-1}}$$

Setzt man ferner in vorstehender Formel 38:

für die Rate $r = 6000$
„ den Prozentsatz $p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$, also für $1{,}0p = 1{,}045$ und für $0{,}0p = 0{,}045$
„ die Anzahl n der Jahre, welche angibt wie lange diese nachschüssige Rente läuft, $= 8$

Hülfsrechnungen:

1). $log\,1{,}045^8 = 8\,.\,log\,1{,}045$

Nun ist:

$log\,1{,}045 = 0{,}0191162904$ (s. Hülfstaf. II)
$.\,8$

$log\,1{,}045^8 = 0{,}1529303232$
oder $= 0{,}1529303$
9301

mithin:
$1{,}045^8 = 1{,}4221$

2). $log\,1{,}045^{21} = 21\,.\,log\,1{,}045$

Nun ist:

$log\,1{,}045 = 0{,}0191162904$
$.\,21$

191162904
382325808

$log\,1{,}045^{21} = 0{,}4014420984$
oder $= 0{,}4014421$
4350
71
68,8

mithin:
$1{,}045^{21} = 2{,}52024$

Hülfsrechnungen:

3). Aus nebenstehender Gleich. 3 ergibt sich:

$\log x = \log 6000 + \log 0{,}4221 - (9 \,.\, \log 1{,}045 + \log 1{,}52024)$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 6000 & = & 3{,}7781513 \\ + \log 0{,}4221 & = & 0{,}6254154-1 \\ \hline & & 4{,}4035667-1 \\ \text{oder:} & = & 3{,}4035667 \\ -(9\,.\log 1{,}045 + \log 1{,}52024) & = & -0{,}3539587 \text{ (s. Hülfsr. 4)} \\ \hline \log x & = & 3{,}0496080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6056 \\ \hline 24 \\ 23 \end{array}$$

mithin:

$x = 1121{,}006$

4). . . .

$$\begin{array}{rcl} \log 1{,}045 & = & 0{,}0191162904 \\ & & .\,9 \\ \hline & & 0{,}1720466136 \\ \text{oder:} & = & 0{,}1720466 \\ + \log 1{,}52024 & = & 0{,}1819007 \\ & & +114 \\ \hline & & 0{,}3539587 \end{array}$$

und für die Anzahl a der Jahre, welche angibt um wieviel Jahre letztere Rente aufgeschoben ist, $= 21$

so erhält man für den baren Wert w_1 dieser Rente:

$$\text{b)}. \; . \; . \; w_1 = \frac{6000\,(1{,}045^8 - 1)}{0{,}045\,.\,1{,}045^{21+8}}$$

Da nun die gegenseitigen Leistungen, also auch die baren Werte w und w_1 gleich sein müssen, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \; . \; . \; \frac{x\,(1{,}045^{21} - 1)}{0{,}045\,.\,1{,}045^{21-1}} = \frac{6000\,(1{,}045^8 - 1)}{0{,}045\,.\,1{,}045^{21+8}}$$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$\frac{x\,(1{,}045^{21} - 1)}{1{,}045^{20}} = \frac{6000\,(1{,}045^8 - 1)}{1{,}045^{29}}$$

$$x = \frac{6000\,(1{,}045^8 - 1)\,.\,1{,}045^{20}}{1{,}045^{29}\,.\,(1{,}045^{21} - 1)}$$

$$2). \; . \; . \; x = \frac{6000\,(1{,}045^8 - 1)}{1{,}045^9\,(1{,}045^{21} - 1)}$$

$$x = \frac{6000\,(1{,}4221 - 1)}{1{,}045^9\,(2{,}52024 - 1)} \quad \text{(s. Hülfsrechn. 1 und 2)}$$

$$3). \; . \; . \; x = \frac{6000\,.\,0{,}4221}{1{,}045^9\,.\,1{,}52024}$$

oder nach der Hülfsrechnung 3:

$$x = 1121{,}006$$

Hiernach ist die gesuchte am Anfang eines jeden Jahres einzuzahlende Summe $= 1121$ Mark und 1 pf.

Aufgabe 342. Jemand will sich für 16000 Mark eine erst nach 8 Jahren beginnende vorschüssige Rente von jährlich 1200 Mark sichern, wie lange kann diese Rente bewilligt werden, wenn die Mise mit 4 % kapitalisiert wird?

Formel 40: $w = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+n-1}}$

„ 1ᵃ: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

„ 41: $W = \dfrac{r\,.\,1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Da in der Aufgabe von einer aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente die Rede ist, so kommt vorstehende Formel 40 in Anwendung.

Setzt man in derselben:

für den baren Wert $w = 16000$

„ die Rate $r = 1200$

„ den Prozentsatz $p = 4$

für die gesuchte Anzahl n der Jahre, welche angibt wie lange die Rente bezogen wird, bezw. für die Anzahl der Rentenbezüge $= x$

und für die Anzahl a der Jahre, welche angibt um wieviel Jahre die Rente aufgeschoben ist, bezw. nach wieviel Jahren die Rente beginnt, $= 8$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \; . \; . \; 16000 = \frac{1200 \,.\, (1{,}04^{x} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{8+x-1}}$$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$16000 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^{7+x} = 1200 \,.\, (1{,}04^{x} - 1)$$

$$640 \,.\, 1{,}04^{7} \,.\, 1{,}04^{x} = 1200 \,.\, (1{,}04^{x} - 1)$$

$$8 \,.\, 1{,}04^{7} \,.\, 1{,}04^{x} = 15 \,.\, (1{,}04^{x} - 1)$$

$$15 \,.\, 1{,}04^{x} - 15 = 8 \,.\, 1{,}04^{7} \,.\, 1{,}04^{x}$$

$$1{,}04^{x} \,.\, (15 - 8 \,.\, 1{,}04^{7}) = 15$$

$$1{,}04^{x} = \frac{15}{15 - 8 \,.\, 1{,}04^{7}} = \frac{15}{15 - 10{,}5274}$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

$$1{,}04^{x} = \frac{15}{4{,}4726}$$

$$x \,.\, \log 1{,}04 = \log 15 - \log 4{,}4726$$

$$x = \frac{\log 15 - \log 4{,}4726}{\log 1{,}04} = \frac{1{,}1760913 - 0{,}6505601}{0{,}0170333}$$

$$x = \frac{0{,}5255312}{0{,}0170333} = \frac{5255312}{170333}$$

Hieraus ergibt sich, dass die Rente auf:

$$x = 30{,}853 \text{ Jahre}$$

bewilligt werden kann.

In betreff des Jahresbruchteils $\frac{853}{1000}$ beachte man folgendes:

Die Rente ist eine vorschüssige Jahresrente, wird also bei Beginn eines jeden Jahres und nicht bei Beginn eines Jahresbruchteils ausgezahlt werden. Anstatt also bei Beginn des $\frac{853}{1000}$ Teils des 30. Jahres, während welcher Zeit die Rente läuft, eine diesem Jahresbruchteil entsprechende Rate auszuzahlen, wird entweder die bei Beginn des 30. Jahres fällige Rate um eine entsprechende Summe erhöht oder es wird bei Beginn des 31. Jahres noch eine bestimmte Rate ausgezahlt. Da jener Jahresbruchteil mehr als $\frac{1}{2}$ Jahr beträgt, so sei hier letzteres angenommen.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 8 \,.\, 1{,}04^{7} = \log 8 + 7 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ &\quad\;\; .\,7 \\ &\quad 0{,}1192331 \\ + \log 8 &= 0{,}9030900 \\ \log 8 \,.\, 1{,}04^{7} &= 1{,}0223231 \\ &\quad\;\; 3046 \\ &\quad\;\; 185 \\ &\quad\;\; 165{,}2 \end{aligned}$$

mithin:

$$8 \,.\, 1{,}04^{7} = 10{,}5274$$

2). $\log 16000 \,.\, 1{,}04^{38} = 38 \,.\, \log 1{,}04 + \log 16000$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}04 &= 0{,}0170333393 \text{ (s. Hülfstaf. II)} \\ &\quad\;\; .\,38 \\ &\quad 1362667144 \\ &\quad 511000179 \\ &\quad 0{,}6472668934 \\ \text{oder} &= 0{,}6472669 \\ + \log 16000 &= 4{,}2041200 \\ &\quad 4{,}8513869 \\ &\quad\;\; 3868 \end{aligned}$$

mithin:

$$16000 \,.\, 1{,}04^{38} = 71021$$

3). $\log 1{,}04^{30} = 30 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}04 &= 0{,}0170333393 \\ &\quad\;\; .\,30 \\ 30 \,.\, \log 1{,}04 &= 0{,}5110001790 \\ \text{oder} &= 0{,}5110002 \\ &\quad\;\; 0003 \end{aligned}$$

mithin:

$$1{,}04^{30} = 3{,}2434$$

Um hiernach die Rate y zu finden, welche nach Beginn des 31. Jahres zur Auszahlung kommt, beachte man, dass dieselbe gleich der Differenz der Endwerte der gegenseitigen Leistungen zu dieser Zeit sein muss.

Bei Beginn des 31. Jahres, an welchem die noch zu bestimmende Rate y fällig ist, ist nach vorstehender Formel 1a der Endwert K der Leistung des Rentenempfängers:

a). . . $K = 16000 \,.\, 1{,}04^{8+30}$

(indem die 30 Jahre lang laufende Rente um 8 Jahre später beginnt als die Einzahlung geschah).

Ferner ist bis zu jener Zeit der Endwert W der vorschüssigen Jahresrente, welche 30 Jahre läuft, nach vorstehender Formel 41:

b). . . $W = \frac{1200 \,.\, 1{,}04\,(1{,}04^{30} - 1)}{0{,}04}$

Somit ergibt sich zur Bestimmung der 31. Rate y, die Gleichung:

$$y = 16000 \,.\, 1{,}04^{8+30} - \frac{1200 \,.\, 1{,}04\,(1{,}04^{30} - 1)}{0{,}04}$$

Hieraus erhält man y, wie folgt:

$$y = 16000 \,.\, 1{,}04^{38} - 30000 \,.\, 1{,}04\,(1{,}04^{30} - 1)$$

$$y = 71021 - 30000 \,.\, 1{,}04\,(3{,}2434 - 1)$$

(siehe Hülfsrechn. 2 u. 3)

$$y = 71021 - 31200 \,.\, 2{,}2434$$

$$y = 71021 - 69994{,}08$$

$$y = 1026{,}92$$

Die letzte, die 31. Rate der Rente, welche am Anfang des 39. Jahres, vom Beginn des Rechtsverhältnisses an gerechnet, fällig ist, beträgt hiernach:

1026 Mark 92 pf.

8). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Frage 52. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten von je r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit w, die

Anzahl der Jahre, welche angibt wie lange die Rente läuft, mit n, die Anzahl der Jahre, welche angibt um wieviel Jahre die Rente aufgeschoben ist, mit a und den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 42 $$w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \cdot 1{,}0p^a}$$

oder wenn man:

$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$, d. i. der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ nach $\frac{1}{m}$ Jahr $= q_1$, also

$0{,}0\frac{p}{m} = q_1 - 1$

und wenn man ferner:

$1{,}0p = q$, d. i. der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ nach 1 Jahr, setzt:

Formel 42[a] $$w = \frac{r \cdot (q_1^{m.n} - 1)}{(q_1 - 1) \cdot q_1^{m.n} \cdot q^a}$$

Diese Formel kann man, wie die Formel 40, siehe Antwort der Frage 50, wie folgt herleiten:

Für den Wert w_1 der nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, hat man zur Zeit des Beginns derselben, also am Ende des a^{ten} Jahres, nach der Formel 30:

a). . . $$w_1 = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}$$

Ferner hat man nach der Erkl. 167 und nach der in der Erkl. 29 (bezw. der Erkl. 11 in der 1. Auflage) aufgestellten Formel:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

für den Barwert w jenes für die Zeit des Endes des a^{ten} Jahres berechneten Werts w_1:

b). . . $$w = \frac{w_1}{1{,}0p^a}$$

Setzt man hierin für w_1 den Wert aus a), so erhält man obige Formel 42.

Frage 53. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen Wertes einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit W, und legt den Buchstaben r, n, p und a dieselbe Bedeutung bei wie in voriger Antwort, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 43 $$W = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

oder wenn man wie in voriger Antwort:

$$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} = q_1 \quad \text{und}$$

$$0{,}0\frac{p}{m} = q_1 - 1 \quad \text{setzt:}$$

Formel 43[a] $$W = \frac{r \cdot (q_1^{m \cdot n} - 1)}{q_1 - 1}$$

Diese Formel kann man folgendermassen herleiten:

Die betreffende Rente beginnt erst nach a Jahren, mithin ist nach diesen a Jahren der Wert der Rente = Null, woraus sich ergibt, dass der Endwert der Rente aus den Angaben zu berechnen ist, welche auf die Zeit vom Ende des a^{ten} Jahres ab bezug haben.

Nach der Antwort der Frage 41 aufgestellten Formel 31 findet man hiernach für den Endwert W der gedachten Rente:

$$W = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

d. i. vorstehende Formel 43 (vergl. auch hiermit die Erkl. 203 und 204).

Frage 54. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer aufgeschobenen vorschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Haben die Buchstaben w, r, p, n und a dieselbe Bedeutung wie in Antwort der Frage 52, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 44 $$w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1} \cdot 1{,}0p^{a}}$$

oder wenn man, wie in Antwort der Frage 50:

$$1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100+\frac{p}{m}}{100} = q_1, \text{ also}$$

$$0{,}0\frac{p}{m} = q_1 - 1 \text{ und } 1{,}0p = q \text{ setzt:}$$

Formel 44a $$w = \frac{r.(q_1^{m.n} - 1)}{(q_1 - 1).q_1^{m.n-1}.q^a}$$

Diese Formel kann man mit Benutzung der Formel 30 in analoger Weise herleiten, wie dies in betreff der Formel 40 in Antwort der Frage 50 geschehen ist.

Frage 55. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen Wertes einer aufgeschobenen vorschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Haben die Buchstaben W, r, p, n und a dieselbe Bedeutung wie in Antwort der Frage 51, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 45 $$W = \frac{r.1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

oder wenn man:

$$1{,}0\frac{p}{m} = q_1, \text{ also } 0{,}0\frac{p}{m} = q_1 - 1 \text{ setzt:}$$

Formel 45a $$W = \frac{r.q_1.(q_1^{m.n} - 1)}{q_1 - 1}$$

Diese Formel kann man mit Benutzung der Formel 32 in analoger Weise herleiten, wie dies in betreff der Formel 41 in Antwort der Frage 51 geschehen ist.

9). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene Renten, deren Raten alle *b* Jahre fällig sind.

Frage 56. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert (die Mise) einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit w, die Anzahl der Jahre, welche angibt wie lange die Rente läuft, mit n, die Zahl, welche angibt um wieviel Jahre die Rente aufgeschoben ist, mit a und den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel, unter der Voraussetzung, dass n durch b ohne Rest teilbar ist (siehe Erkl. 196):

Formel 46 $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{a+n} \cdot (1{,}0p^b - 1)}$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 46ª $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{a+n} \cdot (q^b - 1)}$

Diese Formel kann man mit Benutzung der Formel 34 in analoger Weise herleiten, wie dies in betreff der Formel 42 in Antwort der Frage 52 geschah.

Frage 57. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen Wertes einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit W, und legt man den Buchstaben n, p und a dieselbe Bedeutung bei wie in voriger Antwort, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 47 $W = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 47ª $W = \frac{r(q^n - 1)}{q^b - 1}$

Diese Formel kann man mit Benutzung der Formel 35 in analoger Weise erhalten, wie dies für die Formel 43 in Antwort der Frage 53 geschehen ist.

Erkl. 207. Aus den Formeln 46 und 47 kann man alle früheren für nachschüssige Renten aufgestellte Formeln ableiten.

Wird nämlich: $b = 1$
so geht die Formel 46 über in die Formel 38;
wird ferner: $a = 0$
so geht die Formel 46 über in die Formel 34;
wird schliesslich: $a = 0$ und $b = 1$
so geht die Formel 46 über in die Formel 25.

In analoger Weise erhält man aus der Formel 47 die Formeln 39, 35 und 27.

Auch kann man aus diesen Formeln die Formeln 42 und 43, 30 und 31 ableiten, wenn man für p den dem Jahresbruchteil m entsprechenden Prozentsatz und für die Anzahl der Zeitabschnitte, bezw. für die Anzahl der Rentenbezüge die sich hiernach ergebenden Werte setzt.

Die Formeln 46 u. 47 stellen somit die allgemeinste Form einer Rentengleichung dar, welche sich auf nachschüssige Renten bezieht (siehe auch die folgende Erkl. 208).

Frage 58. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes einer aufgeschobenen vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer aufgeschobenen vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind, mit w, und haben

die Buchstaben r, p, n, a und b dieselbe Bedeutung wie in Antwort der Frage 56, so heisst die diesbezügl. Rentenformel:

Formel 48 $$w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{a+n-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 48ᵃ $$w = \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q^{a+n-b} \,.\, (q^b - 1)}$$

Diese Formel kann man mit Benutzung der Formel 36 in analoger Weise herleiten, wie dies in betreff der Formel 42, siehe Antwort der Frage 52, geschah.

Frage 59. Wie heisst die Formel zur Berechnung des künftigen Wertes einer aufgeschobenen vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen oder Endwert einer aufgeschobenen vorschüssigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind, mit W und haben die Buchstaben r, p, n, a und b dieselbe Bedeutung wie in Antwort der Frage 56, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 49 $$W = \frac{r \,.\, 1{,}0p^b \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 49ᵃ $$W = \frac{r \,.\, q^b \,.\, (q^n - 1)}{q^b - 1}$$

Diese Formel kann man mit Benutzung der Formel 37 in analoger Weise herleiten als dies in betreff der Formel 43 in Antwort der Frage 53 geschah.

Erkl. 208. Aus den Formeln 48 und 49 kann man alle früheren für vorschüssige Renten aufgestellten Formeln ableiten.

Wird nämlich: $b = 1$
so geht die Formel 48 über in die Formel 40;
wird ferner: $a = 0$
so geht die Formel 48 über in die Formel 36;
wird schliesslich: $a = 0$ und $b = 1$
so geht die Formel 48 über in die Formel 28.
In analoger Weise erhält man aus der Formel 49 die Formeln 41, 33 und 29.

Auch kann man aus diesen Formeln 48 und 49 die Formeln 32, 33, 44 und 45 ableiten, wenn man für p den dem Jahresbruchteil entsprechenden Prozentsatz und für die Anzahl der Zeitabschnitte, bezw. für die Anzahl der Rentenbezüge die sich hiernach ergebenden Werte setzt.

Die Formeln 48 u. 49 stellen somit die allgemeinste Form einer Rentengleichung dar, welche sich auf vorchschüssige Renten bezieht (siehe Erkl. 207).

Anmerkung 11. Gelöste und analoge ungelöste Aufgaben über die in den Abschnitten 8). und 9). entwickelten Formeln findet man in dem Abschn. E und in dem III. Teil dieses Buches.

C. Ueber die Berechnung der Leibrenten.

Anmerkung 12. Wie in der Antwort der Frage 35, Seite 163, bereits erwähnt, gründet sich die Berechnung der Leibrenten auf die wahrscheinliche Lebensdauer des Rentenempfängers, welche mittels der Mortalitätstabellen, bezw. mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt wird. Ist in einer diesbezüglichen Aufgabe die Lebensdauer gegeben, was nur in Uebungsaufgaben der Fall ist, siehe z. B. die Aufgabe 323, indem es bei derartigen Fällen hauptsächlich auf die Bestimmung der Lebensdauer ankommt, so findet die weitere Berechnung nach den in vorstehendem Abschnitt B. vorgeführten Formeln (siehe Erkl. 178) statt. Für alle andern möglichen Fälle findet man Ausführliches in Kleyers Lehrbücher über das Versicherungswesen.

D. Ueber die ewigen Renten.

(Ablösungsrechnung.)

1). Entwicklung der Rentenformeln für **nachschüssige** ewige Jahresrenten.

Frage 60. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer nachschüssigen ewigen Jahresrente, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Erkl. 209. Von einem künftigen oder Endwert einer ewigen Rente kann bei Berechnungen keine Rede sein, denn solcher wird in allen Fällen unendlich gross.

Erkl. 210. Der Wert des in nebenstehender Gleichung b). vorkommenden 2. Summanden: $\frac{r}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}$ wird mit wachsendem n stetig kleiner und kleiner (siehe Erkl. 211), weil in diesem Falle die Potenz $1{,}0p^n$, mithin auch der ganze Nenner: $1{,}0p^n \cdot 0{,}0p$ jenes Bruches stetig grösser wird. Wird der Wert für n unendlich gross, so wird nach der Erkl. 211 der Wert jenes Bruches unendlich klein, bezw. = Null.

Erkl. 211. Wird der Nenner (Divisor) eines Bruches (Quotienten) stetig grösser und behält der Zähler (Dividend) seinen endlichen Wert unverändert bei, so wird der Wert des Bruches stetig kleiner und kleiner, d. h. er nähert sich stetig dem Grenzwerte Null;

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer nachschüssigen ewigen Jahresrente mit w, deren Raten mit r, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 50 $w = \frac{100 \cdot r}{p}$

oder, wenn man $w = \frac{r}{0{,}0p}$ setzt und den Zinsfaktor q einführt, also $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 50[a] $w = \frac{r}{q-1}$

Diese Formel kann man folgendermassen herleiten:

Die allgemeine Formel zur Berechnung des baren Wertes einer nachschüssigen Jahresrente, welche n Jahre läuft, heisst:

a). . . . $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}$ (siehe Formel 25)

Schreibt man diese Formel wie folgt:

$$w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - r)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} = \frac{r \cdot 1{,}0p^n}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}$$

oder:

b). . . . $w = \frac{r}{0{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}$

und berücksichtigt man, dass bei einer ewigen Rente die Anzahl n der Jahre unendlich gross ($=\infty$) ist, und dass, wenn in dieser Gleichung a). $n = \infty$ gesetzt wird, der zweite Summand unendlich klein, nämlich = Null wird (siehe Erkl. 210), so erhält man aus der Gleichung b). die weitere Gleichung:

wird der Nenner unendlich gross, so wird der Wert des Bruches unendlich klein, d. h. = Null.

Erkl. 212. Aus der umstehenden Formel 50:

$$w = \frac{100 \cdot r}{p}$$

ergibt sich:

a). . . . $r = \frac{w \cdot p}{100}$

d. h.: die Rate r einer ewigen Rente ist gleich den jährlichen Zinsen $\frac{w \cdot p}{100}$ des baren Werts w der Rente,

oder:

der bare Wert w einer ewigen Rente ist ein Kapital, dessen jährliche Zinsen $\frac{w \cdot p}{100}$ gleich einer Rate r jener ewigen Rente sind.

Erkl. 213. Die ewigen Renten finden besonders Anwendung bei den sogenannten Ablösungsrechnungen, d. s. Berechnungen über die Ablösungssummen von Lasten, welche für ewige Dauer auf Grundstücken, Gebäuden etc. ruhen, wie z. B. die Zehnt- u. Bauablösungen etc.

c). . . . $w = \frac{r}{0{,}0p}$

oder:

$$w = \frac{100 \cdot r}{p}$$

nämlich vorstehende Formel 50.

2). Entwicklung der Rentenformeln für vorschüssige ewige Jahresrenten.

Frage 61. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer vorschüssigen ewigen Jahresrente?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer vorschüssigen ewigen Jahresrente mit w, deren Raten mit r, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 51 $w = \frac{100 \cdot r}{p} \cdot 1{,}0p$

oder, wenn man $w = \frac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p}$ setzt und den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 51[a] $w = \frac{r \cdot q}{q - 1}$

Diese Formel kann man analog wie die Formel 50 folgendermassen herleiten:

Die allgemeine Form zur Berechnung des baren Wertes einer vorschüssigen Jahresrente, welche n Jahre lang läuft, heisst:

a). . . $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}$ (siehe Formel 28)

Schreibt man diese Formel wie folgt:

$$w = \frac{r\,.\,1{,}0p^n - r}{1{,}0p^{n-1}\,.\,0{,}0p} = \frac{r\,.\,1{,}0p^n}{1{,}0p^{n-1}\,.\,0{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p^{n-1}\,.\,0{,}0p}$$

$$w = \frac{r\,.\,1{,}0p^{n-(n-1)}}{0{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p^n\,.\,1{,}0p^{-1}\,.\,0{,}0p}$$

oder:

$$\text{b)}\ldots w = \frac{r\,.\,1{,}0p}{0{,}0p} - \frac{r\,.\,1{,}0p}{1{,}0p^n\,.\,0{,}0p}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$ der 2. Summand unendlich klein, bezw. = Null wird (siehe Antwort der Frage 60, bezw. Erkl. 210), so erhält man:

$$\text{c)}\ldots w = \frac{r\,.\,1{,}0p}{0{,}0p} = \frac{100\,.\,r}{p}\cdot 1{,}0p$$

d. i. vorstehende Formel 51.

3). Entwicklung der Rentenformeln für **nachschüssige** ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Frage 62. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 52 $$\ldots\ldots w = \frac{100\,.\,r}{\frac{p}{m}}$$

oder, wenn man $w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m}}$ setzt und den Zinsfaktor q_1, d. i. der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ nach Ablauf eines $\frac{1}{m}$ Jahres, einführt, also $0{,}0\frac{p}{m} = 1{,}0\frac{p}{m} - 1 = q_1$ setzt:

Formel 52[a] $$\ldots\ldots w = \frac{r}{q_1 - 1}$$

Diese Formel kann man analog wie die Formel 50 folgendermassen herleiten:

Die allgemeine Form zur Berechnung des baren Wertes einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, heisst:

$$\text{a)}\ldots w = \frac{r\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}\cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}} \quad \text{(siehe Formel 30)}$$

Schreibt man diese Formel wie folgt:

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}} - \frac{1}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}$$

oder:

$$\text{b)}. \ldots w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m}} - \frac{1}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand unendlich klein, bezw. = Null wird (siehe Antw. der Frage 60, bezw. Erkl. 210), so erhält man:

$$\text{c)}. \ldots w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m}} = \frac{100 \cdot r}{\frac{p}{m}}$$

d. i. vorstehende Formel 52.

4). Entwicklung der Rentenformeln für **vorschüssige** ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Frage 63. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 53 $$\ldots\ldots w = \frac{100 \cdot r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}$$

oder, wenn man $w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m}}$ setzt und den Zinsfaktor q_1, d. i. der Wert der Geldeinheit bei p % nach Verlauf eines $\frac{1}{m}$ Jahres, einführt, also $1{,}0\frac{p}{m} = q_1$ und $0{,}0\frac{p}{m} = q_1 - 1$ setzt:

Formel 53[a] $$\ldots\ldots w = \frac{r \cdot q_1}{q_1 - 1}$$

Diese Formel kann man analog wie die Formel 50 folgendermassen herleiten:

Die allgemeine Form zur Berechnung des baren Wertes einer vorschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, heisst:

$$\text{a)}. \ldots w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1}}$$ (s. Formel 32)

Schreibt man diese Formel wie folgt:

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1}} - \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1}}$$

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - (m \cdot n - 1)}}{0{,}0\frac{p}{m}} - \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1}}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m}} - \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1}}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand unendlich klein, bezw. = Null wird (siehe Antw. der Frage 60, bezw. Erkl. 210), so erhält man:

$$\text{c)} \ldots w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m}} = \frac{100 \cdot r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}$$

d. i. vorstehende Formel 53.

5). Entwicklung der Rentenformeln für nachschüssige ewige Renten, deren Raten alle *b* Jahre fällig sind.

Frage 64. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 54 $w = \dfrac{r}{1{,}0p^b - 1}$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 54[a] $w = \dfrac{r}{q^b - 1}$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—53 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 34:

$$\text{a)} \ldots w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot (1{,}0p^b - 1)}$$

wie folgt:

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n \,.\, (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^n \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots w = \frac{r}{1{,}0p^b - 1} - \frac{r}{1{,}0p^n (1{,}0p^b - 1)}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$ der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

$$\text{c)} \ldots w = \frac{r}{1{,}0p^b - 1}$$

d. i. vorstehende Formel 54.

6). Entwicklung der Rentenformeln für vorschüssige ewige Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

Frage 65. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügl. Rentenformel:

$$\text{Formel 55} \ldots\ldots w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^b}{1{,}0p^b - 1}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

$$\text{Formel 55}^a \ldots\ldots w = \frac{r \,.\, q^b}{q^b - 1}$$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—54 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 36:

$$\text{a)} \ldots w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

wie folgt:

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^{n-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^{n-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n \,.\, 1{,}0p^{-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^n \,.\, 1{,}0p^{-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^b}{1{,}0p^b - 1} - \frac{r \,.\, 1{,}0p^b}{1{,}0p^n \,.\, (1{,}0p^b - 1)}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

$$\text{c)} \ldots w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^b}{1{,}0p^b - 1}$$

d. i. vorstehende Formel 55.

7). Entwicklung der Rentenformeln für aufgeschobene ewige Jahresrenten.

Frage 66. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Jahresrente?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Jahresrente mit w, deren Raten mit r und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 56 $w = \frac{100 \cdot r}{p \cdot 1{,}0p^a}$

oder, wenn man $w = \frac{r}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^a}$ setzt und den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q-1$ setzt:

Formel 56a $w = \frac{r}{(q-1) \cdot q^a}$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—55 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 38:

$$\text{a). . . } w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}}$$

wie folgt:

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0p^n}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}} - \frac{r}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}}$$

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0p^n}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^a \cdot 1{,}0p^n} - \frac{r}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^a \cdot 1{,}0p^n}$$

oder:

$$\text{b). . . } w = \frac{r}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^a} - \frac{r}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^a \cdot 1{,}0p^n}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

$$\text{c). . . } w = \frac{r}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^a} = \frac{100 \cdot r}{p \cdot 1{,}0p^a}$$

d. i. vorstehende Formel 56.

Frage 67. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Jahresrente?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Jahresrente mit w, deren Renten mit r und den Zinsfuss mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 57 $w = \frac{100 \cdot r}{p \cdot 1{,}0p^{a-1}}$

oder, wenn man $w = \frac{r}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a-1}}$ setzt und den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ und $0{,}0p = q - 1$ setzt:

Formel 57[a] $w = \frac{r}{(q-1) \,.\, q^{a-1}}$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—56 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 40:

a). . . $w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}}$

wie folgt:

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^n}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}} - \frac{r}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}}$$

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^n}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 1{,}0p^{a-1}} - \frac{r}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a-1} \,.\, 1{,}0p^n}$$

oder:

b). . . $w = \frac{r}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a-1}} - \frac{r}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a-1} \,.\, 1{,}0p^n}$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

c). . . $w = \frac{r}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a-1}} = \frac{100 \,.\, r}{p \,.\, 1{,}0p^{a-1}}$

d. i. vorstehende Formel 57.

8). Entwicklung der Rentenformeln für **aufgeschobene** ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Frage 68. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 58 $w = \frac{100 \,.\, r}{\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a}$

oder wenn man:

$w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a}$ und in dieser Formel $1{,}0p = q$ und $0{,}0\frac{p}{m} = q_1$ setzt:

Formel 58[a] $w = \frac{r}{q_1 \cdot q^a}$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—57 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 42:

$$\text{a)} \ldots w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 1{,}0p^a}$$

wie folgt:

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 1{,}0p^a} - \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 1{,}0p^a}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} - \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^m \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^n}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

$$\text{c)} \ldots w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} = \frac{100 \cdot r}{\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a}$$

d. i. vorstehende Formel 58.

Frage 69. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 59 $$\ldots w = \frac{100 \cdot r}{\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}$$

oder wenn man:

$$w = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a}$$ und in dieser Form $1{,}0p = q$ und $1{,}0\frac{p}{m} = q_1$, also $0{,}0\frac{p}{m} = q_1 - 1$ setzt:

Formel 59ᵃ $$\ldots w = \frac{r \cdot q_1}{(q_1 - 1) \cdot q}$$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—58 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 44:

$$\text{a)} \ldots w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1} \cdot 1{,}0p^a}$$

wie folgt:

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1} \cdot 1{,}0p^a} - \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 0{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1} \cdot 1{,}0p^a}$$

oder:

$$\text{b).}\quad w = \frac{r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} - \frac{r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a .\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

$$\text{c).}\quad w = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} \cdot 1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 \,.\, r}{\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}$$

d. i. vorstehende Formel 59.

9). Entwicklung der Rentenformeln für **aufgeschobene** ewige Renten, deren Raten alle *b* Jahre fällig sind.

Frage 70. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 60 $$w = \frac{r}{1{,}0p^a .\, (1{,}0p^b - 1)}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 60ᵃ $$w = \frac{r}{q^a .\, (q^b - 1)}$$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—59 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 46:

$$\text{a). . .}\quad w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{a+n} .\, (1{,}0p^b - 1)}$$

wie folgt:

$$w = \frac{r \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^{a+n} .\, (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^{a+n} .\, (1{,}0p^b - 1)}$$

oder:

$$\text{b).}\quad w = \frac{r}{1{,}0p^a .\, (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^a .\, 1{,}0p^n .\, (1{,}0p^b - 1)}$$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

c). . . . $w = \frac{r}{1{,}0p^a . (1{,}0p^b - 1)}$

d. i. vorstehende Formel 60.

Frage 71. Wie heisst die Formel zur Berechnung des baren Wertes (siehe Erkl. 209) einer aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind?

Antwort. Bezeichnet man den baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je r alle b Jahre fällig sind, mit w, den Prozentsatz mit p, so heisst die diesbezügliche Rentenformel:

Formel 61 $w = \frac{r}{1{,}0p^{a-b} . (1{,}0p^b - 1)}$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt, also $1{,}0p = q$ setzt:

Formel 61[a] $w = \frac{r}{q^{a-b} . (q^b - 1)}$

Diese Formel kann man analog wie die Formeln 50—60 wie folgt herleiten:

Schreibt man die Formel 48:

a). . . $w = \frac{r . (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{a+n-b} . (1{,}0p^b - 1)}$

wie folgt:

$$w = \frac{r . 1{,}0p^n}{1{,}0p^{a+n-b} . (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^{a+n-b} . (1{,}0p^b - 1)}$$

oder:

b). . . $w = \frac{r}{1{,}0p^{a-b} . (1{,}0p^b - 1)} - \frac{r}{1{,}0p^{a-b} . 1{,}0p^n . (1{,}0p^b - 1)}$

und berücksichtigt man, dass für $n = \infty$, der 2. Summand nach der Erkl. 210 = Null wird, so erhält man:

c). . . $w = \frac{r}{1{,}0p^{a-b} . (1{,}0p^b - 1)}$

d. i. vorstehende Formel 61.

Erkl. 214. Aus den Formeln 60 und 61 kann man alle früheren für ewige Renten aufgestellten Formeln ableiten.

Wird nämlich: $b = 1$

so gehen die Formeln 60 und 61 bezw. über in die Formeln 56 und 57.

Wird ferner: $a = 0$

so gehen die Formeln 60 und 61 bezw. über in die Formeln 54 und 55.

Wird schliesslich $a = 0$ und $b = 1$

so gehen die Formeln 60 und 61 bezw. über über in die Formeln 50 und 51.

Auch kann man aus diesen Formeln die Formeln 52, 53, 58 und 59 ableiten, wenn man für p einen dem Jahresbruchteil entsprechenden Prozentsatz setzt.

Die Formeln 60 und 61 stellen somit die allgemeinste Form einer Rentengleichung dar, welche sich auf ewige Renten bezieht (siehe auch die Erkl. 207 und 208).

Gelöste Aufgaben.

(Siehe Anmerk. 8, Seite 164.)

Aufgabe 343. Die Gemeinde A hat auf dem Eigentum der Gemeinde B eine Brücke hergestellt und hierbei die Verpflichtung übernommen, für die jeweilige Herstellung derselben aufzukommen. Nach Taxation ist durchschnittlich nach je 38 Jahren ein Neubau jener Brücke erforderlich, was einen stets wiederkehrenden Kostenaufwand von 2000 Mark verursacht.

Die Gemeinde A will nun dieser Verpflichtung enthoben sein und dafür einer Bank, welche jene Verpflichtung übernehmen will, entweder

a). am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe oder

b). sofort, ein für allemal, eine bestimmte Summe bar entrichten.

Wie hoch würden sich in beiden Fällen die zu entrichtenden Summen belaufen, wenn der Zinsfuss = 4 % beträgt?

Formel 50: $w = \frac{100 \, . \, r}{p}$

" 54: $w = \frac{r}{1{,}0p^b - 1}$

Auflösung. Der Sinn einer anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht für beide Fälle darin, dass die gegenseitigen Leistungen einander gleich sein müssen.

a). Die Leistung der Gemeinde besteht im 1. Falle darin, dass sie eine nachschüssige ewige Jahresrente, deren Raten von je x gesucht sind, auszahlt.

Die Leistung der Bank, welche die Verpflichtung übernimmt, die betreffende Brücke jedesmal wiederherzustellen besteht in einer nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je 2000 Mark alle 38 Jahre fällig sind.

Da die gegenseitigen Leistungen gleich sein müssen, so müssen auch die Barwerte dieser beiden ewigen Renten gleich sein.

Setzt man in vorstehender Formel 50:

$r = x$ und

$p = 4$

so erhält man für den baren Wert w der Leistung der Gemeinde:

1). . . $w = \frac{100 \, . \, x}{4}$

Setzt man in vorstehender Formel 54:

$r = 2000$

$p = 4$ und

$b = 38$

so erhält man für den baren Wert w der Leistung der betreffenden Bank:

2). . . $w = \frac{2000}{1{,}04^{38} - 1}$

Aus den Gleichungen 1). und 2). erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

3). . . $\frac{100 \, . \, x}{4} = \frac{2000}{1{,}04^{38} - 1}$

Hülfsrechnung.

$log\, 1{,}04^{38} = 38 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist: $log\, 1{,}04 = 0{,}0170333393$ (s. Hülfstaf. II)

$\cdot\, 38$

1362667144

511000179

$log\, 1{,}04^{38} = 0{,}6472668934$

oder $= 0{,}6472669$

2656

13

9,8

mithin:

$1{,}04^{38} = 4{,}43881$

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{80}{1{,}04^{38} - 1}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$x = \frac{80}{4{,}43881 - 1} = \frac{80}{3{,}43881}$$

und hieraus ergibt sich durch einfache Division:

$$x = 23{,}26$$

Die Gemeinde hätte somit am Ende eines jeden Jahres 23 Mark 26 pf. zu bezahlen.

b). Die Leistung der Gemeinde besteht im 2. Falle in einer bar zu leistenden und gesuchten Summe y.

Die Leistung der Bank besteht wie im 1. Falle in einer nachschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je 2000 Mark alle 38 Jahre fällig sind.

Da nun die gegenseitigen Leistungen, also auch die baren Werte derselben gleich sein müssen, so muss, wenn man in vorstehender Formel 54:

$$r = 2000$$
$$p = 4 \text{ und}$$
$$b = 38 \text{ setzt,}$$

der bare Wert w:

$$w = \frac{2000}{1{,}04^{38} - 1}$$

gleich jener Barsumme y sein, man hat somit für y die Bestimmungsgleichung:

$$4). \;.\;.\; y = \frac{2000}{1{,}04^{38} - 1}$$

Mit Benutzung nebenstehender Hülfsrechnung erhält man:

$$y = \frac{2000}{4{,}43881 - 1} = \frac{2000}{3{,}43881}$$

oder nach einfacher Division:

$$y = 581{,}596$$

Die Gemeinde hätte somit ein für allemal eine Ablösungssumme von 581 Mark und 60 pf. zu entrichten.

*). **Aufgabe 344.** Welches Ablösungskapital ist für eine ewige Jahresrente von 150 Mark bar zu entrichten, wenn die erste Rate erst am Ende des 20. Jahres zu geschehen hat und der Zinsfuss zu 4 % angenommen wird?

Formel 56: $w = \dfrac{100 \,.\, r}{p \,.\, 1{,}0p^{a}}$

Auflösung. Die in Rede stehende Rente kann man als eine um 19 Jahre

aufgeschobene nachschüssige ewige Jahresrente betrachten (siehe Erkl. 215), somit kommt zur Berechnung des baren Wertes derselben, bezw. der gesuchten Ablösungssumme x, vorstehende Formel 56 in Anwendung.

Setzt man in derselben:

$$w = x$$
$$r = 150$$
$$p = 4 \text{ und}$$
$$a = 19$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \quad . \quad . \quad x = \frac{100 \,.\, 150}{4 \,.\, 1{,}04^{19}}$$

Hieraus erhält man x wie folgt:

$$x = \frac{25 \,.\, 150}{1{,}04^{19}}$$

$$\log x = \log 25 + \log 150 - 19 \,.\, \log 1{,}04$$

Nun ist: $\log 25$	$=$	1,3979400
$+ \log 150$	$=$	2,1760913
		3,5740313
$- 19 \,.\, \log 1{,}04$	$=$	$-$0,3236334 (s. Hülfsrechn.)
$\log x$	$=$	3,2503979
		3956
		23
		24,4

mithin:

$$x = 1779{,}91$$

Das gesuchte Ablösungskapital ist hiernach = 1779 Mark 91 pf.

Erkl. 215. Die in der vorstehenden Aufgabe vorgeführte Rente hätte man auch als eine um 20 Jahre aufgeschobene vorschüssige ewige Jahresrente betrachten und hiernach zur Lösung der Aufgabe die Formel 57 anwenden können.

Hülfsrechnung.

$19 \,.\, \log 1{,}04$	$=$	0,0170333393 (s. Hülfstaf. II)
		. 19
		1533000537
		170333393
$19 \,.\, \log 1{,}04$	$=$	0,3236334467
oder	$=$	0,3236334

*). **Aufgabe 345.** Eine Gemeinde hat die Verpflichtung eine über einen Bach führende Brücke, deren Bau zu 3500 Mark veranschlagt ist, alle 40 Jahre wieder neu herzustellen. Mit welcher Barzahlung kann sich die Gemeinde dieser Verpflichtung entheben, wenn zu der Zeit an welcher die Barzahlung geleistet wird, nach der Taxation die Brücke zum 1. mal nach 10 Jahren baufällig ist und der Zinsfuss zu 3 % angenommen wird?

Formel 61: $w = \dfrac{r}{1{,}0p^{a-b} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)}$

Auflösung. Die gesuchte Barzahlung x mit welcher die Gemeinde die Verpflichtung der jedesmaligen Herstellung der Brücke ablösen kann, ist gleich dem Barwert einer um 10 Jahre aufgeschobenen vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je 3500 Mark alle 40 Jahre fällig sind.

Setzt man daher in vorstehender Formel 61:

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}03^{40} = 40 \,.\, log\, 1{,}03$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} log\, 1{,}03 & = & 0{,}0128372247 \text{ (s. Hülfstaf. II)} \\ & & .\,40 \\ \hline log\, 1{,}04^{40} & = & 0{,}5134889880 \\ \text{oder} & = & 0{,}5134890 \\ & & 4840 \\ \hline & & 50 \\ & & 53{,}2 \end{array}$$

mithin:

$1{,}04^{40} = 3{,}26204$

2). $log\, x = log\, 3500 + 30 \,.\, log\, 1{,}03 - log\, 2{,}26204$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} log\, 1{,}03 & = & 0{,}0128372247 \text{ (s. Hülfstaf. II)} \\ & & .\,30 \\ \hline 30 \,.\, log\, 1{,}03 & = & 0{,}3851167410 \\ \text{oder} & = & 0{,}3851167 \\ + log\, 3500 & = & 3{,}5440680 \\ \hline & & 3{,}9291847 \\ - log\, 2{,}26204 & = & -0{,}3545003 \text{ (s. Hülfsr. 3)} \\ \hline log\, x & = & 3{,}5746844 \\ & & 6793 \\ \hline & & 51 \\ & & 58 \end{array}$$

mithin:

$numlog\, x = 3755{,}65$

3). . . $log\, 2{,}26204 = 0{,}3544926$

$$\begin{array}{r} 0{,}3544926 \\ + 76{,}8 \\ \hline 0{,}3545003 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} w & = & x \\ r & = & 3500 \\ p & = & 3 \\ a & = & 10 \text{ und} \\ b & = & 40 \end{array}$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots x = \frac{3500}{1{,}03^{10-40} \,.\, (1{,}03^{40} - 1)}$$

Hieraus findet man x wie folgt:

$$x = \frac{3500}{1{,}03^{-30} \,.\, (1{,}03^{40} - 1)}$$

$$x = \frac{3500 \,.\, 1{,}03^{30}}{(3{,}26204 - 1)} \text{ (siehe Hülfsrechn. 1)}$$

$$x = \frac{3500 \,.\, 1{,}03^{30}}{2{,}26204}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechnung 2).:

$$x = 3755{,}65$$

Die Gemeinde hat hiernach eine Ablösungssumme von 3755 Mark und 65 pf. zu zahlen.

Anmerkung 13. Weitere gelöste und analoge ungelöste Aufgaben über die ewigen Renten findet man in dem Abschnitt E und in dem III. Teil dieses Buches.

E. Gemischte praktische Aufgaben über die Rentenrechnung

unter anderem:

α). Aufgaben über den mittleren Zahlungstermin von Renten,
β). „ „ die Verwandlung von Renten,
γ). „ „ solche Renten, welchen zweierlei Zinsfuss zu Grunde liegt,
δ). „ „ solche Renten, welche nach arithm. oder geometr. Progression wachsen.

1). Gelöste Aufgaben

mit einigen sich daraus ergebenden weiteren Formeln.

Aufgabe 346. Welches ist der mittlere Zahlungstermin einer nachschüssigen Jahresrente, welche n Jahre lang bezogen wird, wenn der Zinsfuss $= p$ % ist?

Formel 1ᵃ: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

„ 25: $w = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Zur Berechnung des gesuchten Zahlungstermins x beachte man, dass der bare Wert des nach dem mitt-

Erkl. 216. Unter dem mittleren Zahlungstermin einer Rente versteht man die Zeit, nach welcher der sogenannte nominelle Wert der Rente (siehe Erkl. 216[a]) auf einmal ausgezahlt werden kann, ohne dass hierdurch dem Rentengeber, noch dem Rentenempfänger ein Schaden erwächst.

Erkl. 216[a]. Unter dem nominellen Wert einer Rente versteht man die Summe aller Rentenbezüge ohne Zinsen und ohne irgend welchen Abzug.

Erkl. 217. Der nominelle Wert einer nachschüssigen Jahresrente, welche n Jahre lang läuft, also n mal bezogen wird und deren Raten je $= r$ sind, ist

$$= n \cdot r$$

Erkl. 218. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung 3). kann man, für $x = t$ gesetzt, als:

Formel 62:

$$t = \frac{\log n + \log 0{,}0p + n \cdot \log 1{,}0p - \log(1{,}0p^n - 1)}{\log 1{,}0p}$$

sich besonders merken und zwar für den Fall, dass der mittlere Zahlungstermin t einer nachschüssigen Jahresrente gesucht ist.

leren Zahlungstermin fälligen nominellen Wertes der Rente (siehe die Erkl. 216 und 216[a]) gleich dem Barwerte der Rente selbst sein muss.

Setzt man in umstehender Formel 1[a] $n = x$, nämlich gleich dem gesuchten mittleren Zahlungstermin, und K gleich dem nominellen Wert der Rente, welche nach jenem mittleren Zahlungstermin x fällig ist, nämlich $= n \cdot r$ (siehe Erkl. 217), so erhält man für den Barwert k derselben:

$$\text{a)} \ldots \quad k = \frac{n \cdot r}{1{,}0p^x}$$

Ferner erhält man für den baren Wert w der nachschüssigen Jahresrente, welche n Jahre lang läuft, nach umstehender Formel 25:

$$\text{b)} \ldots \quad w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$$

Zur Bestimmung des mittleren Zahlungstermins x besteht nach vorstehendem hiernach die Gleichung:

$$1) \ldots \quad \frac{n \cdot r}{1{,}0p^x} = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$$

Hieraus erhält man x wie folgt:

$$\frac{n}{1{,}0p^x} = \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$$

$$\frac{1{,}0p^x}{n} = \frac{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}{1{,}0p^n - 1}$$

$$2) \ldots \quad 1{,}0p^x = \frac{n \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}{1{,}0p^n - 1}$$

$$x \cdot \log 1{,}0p = \log n + \log 0{,}0p + n \cdot \log 1{,}0p$$

oder:

$$3). \quad x = \frac{\log n + \log 0{,}0p + n \cdot \log 1{,}0p - \log(1{,}0p^n - 1)}{\log 1{,}0p}$$

(siehe Erkl. 218)

Aufgabe 347. Welches ist der mittlere Zahlungstermin einer vorschüssigen Jahresrente, welche n Jahre lang bezogen wird, wenn der Zinsfuss $= p\,\%$ ist?

Formel 1[a]: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

" 28: $w = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}$

Auflösung. Analog wie in voriger Antwort erhält man mit Benutzung der vorstehenden Formeln 1[a] und 28, für die Barwerte k und w:

a). . . . $k = \frac{n \cdot r}{1{,}0p^x}$

b). . . . $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}$

und zur Bestimmung des gesuchten mittleren Zahlungstermins x die Gleichung:

1). . . $\frac{n \cdot r}{1{,}0p^x} = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}$.

Hieraus erhält man x wie folgt:

$$\frac{n}{1{,}0p^x} = \frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}$$

$$\frac{1{,}0p^x}{n} = \frac{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}$$

2). . . $1{,}0p^x = \frac{n \cdot 1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}$

$x \cdot log\, 1{,}0p = log\, n + (n-1) \cdot log\, 1{,}0p + log\, 0{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1)$

oder:

3). . . $x = \frac{log\, n + (n-1) \cdot log\, 1{,}0p + log\, 0{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1)}{log\, 1{,}0p}$

(siehe Erkl. 219)

Erkl. 219. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung 3). kann man, für $x = t$ gesetzt, als:

Formel 63:

$$t = \frac{log\, n + log\, 0{,}0p + (n-1) \cdot log\, 1{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1)}{log\, 1{,}0p}$$

sich besonders merken, und zwar für den Fall, wenn der mittlere Zahlungstermin t einer vorschüssigen Jahresrente gesucht ist.

Aufgabe 348. Welches ist der mittlere Zahlungstermin

a). einer nachschüssigen,

b). einer vorschüssigen

Jahresrente, deren Raten je = 600 ℳ betragen und welche 30 Jahre lang bezogen werden, wenn der Zinsfuss = 5 % beträgt?

Formel 62:

$$t = \frac{log\, n + log\, 0{,}0p + n \cdot log\, 1{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1)}{log\, 1{,}0p}$$

Formel 63:

$$t = \frac{log\, n + log\, 0{,}0p + (n-1) \cdot log\, 1{,}0p - log\,(1{,}0p^n - 1)}{log\, 1{,}0p}$$

Auflösung. a). Zur Berechnung des gesuchten mittleren Zahlungstermins x der gedachten nachschüssigen Jahresrente setze man in vorstehender Formel 62 (siehe Erkl. 218):

$t = x$

$n = 30$ und

$p = 5$

Hiernach erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $x = \frac{log\, 30 + log\, 0{,}05 + 30 \cdot log\, 1{,}05 - log\,(1{,}05^{30} - 1)}{log\, 1{,}05}$

Nach den Hülfsrechnungen 1). und 2). ergibt sich hieraus:

$$x = \frac{1{,}4771213 + 0{,}6989700 - 2 + 0{,}6356990 - 0{,}5214181}{0{,}0211893}$$

Hülfsrechnungen:

1). . . $30 \,.\, log\, 1,05 = 0,0211892991$ (s. Hülfstafel II)

$. 30$

$30 \,.\, log\, 1,05 = 0,6356989730$

oder $= 0,6356990$

6948

42

40,4

1,6

1,0

0,6

mithin:

$1,05^{30} = 4,3221416$

2). $log\,(1,05^{30} - 1) = log\,(4,3221416 - 1) =$

$log\, 3,3221416 = 0,5214127$

$+ 52,4$

$+ 1,3$

$0,5214181$

3). $(30 - 1) \,.\, log\, 1,05 = 29 \,.\, log\, 1,05$

Nun ist:

$log\, 1,05 = 0,0211892991$ (s. Hülfstafel II)

$. 29$

1907036919

423785982

$29 \,.\, log\, 1,05 = 0,6144896739$

oder $= 0,6144897$

$$x = \frac{0,2903722}{0,0211893} = \frac{2903722}{211893}$$

oder:

$$x = 13,7$$

Der gesuchte mittlere Zahlungstermin der nachschüssigen Rente ist also = 13,7 Jahre.

Auflösung b). Zur Berechnung des gesuchten mittleren Zahlungstermins y der gedachten vorschüssigen Jahresrente setze man in umstehender Formel 63 (siehe Erkl. 219):

$$t = y$$
$$n = 30 \text{ und}$$
$$p = 5$$

Hiernach erhält man für y die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots y = \frac{log\, 30 + log\, 0,05 + (30 - 1) \,.\, log\, 1,05 - log\,(1,05^{30} - 1)}{log\, 1,05}$$

Nach den Hülfsrechnungen 1)., 2). und 3). ergibt sich hieraus:

$$x = \frac{1,4771213 + 0,6989700 - 2 + 0,6144897 - 0,5214181}{0,0211893}$$

$$x = \frac{0,2691629}{0,0211893} = \frac{2691629}{211893}$$

oder:

$$x = 12,7$$

Der gesuchte mittlere Zahlungstermin der vorschüssigen Rente ist also = 12,7 Jahre.

*). **Aufgabe 349.** Ein 30jähriger Mann ist im Besitz von 20000 Mark, die zu $4^{1}/_{2}$ % Zinseszinsen angelegt sind. Er möchte zu diesem Kapital durch 20 Jahre hindurch am Ende jeden Jahres eine bestimmte Summe zulegen, damit er durch weitere 20 Jahre eine jährliche Rente von 6000 Mark erheben kann. Wie gross muss jene Summe sein, wenn der erste Rentenbezug gerade 1 Jahr nach dem Aufhören der Einzahlungen fällig sein soll?

Formel 25: $$w = \frac{r \,.\, (1,0p^{n} - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{n}}$$

Formel 38: $$w = \frac{r \,.\, (1,0p^{n} - 1)}{0,0p \,.\, 1,0p^{a+n}}$$

Auflösung. Der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht darin, dass die Barwerte der gegenseitigen Leistungen einander gleich sein müssen (siehe Erkl. 220).

Nun ist der Barwert der Leistung des Rentenempfängers gleich 20 000 Mark vermehrt um den Barwert einer nachschüssigen Jahresrente, welche 20 Jahre

Erkl. 220. Man hätte auch zum Ansetzen einer erforderlichen Bestimmungsgleichung von dem allgemeineren Gedanken ausgehen können, dass die Werte der gegenseitigen Leistungen zu irgend einer bestimmten Zeit, während des Rechtsverhältnisses, einander gleich sein müssen.

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}045^{20} = 20 \,.\, log\, 1{,}045$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 1{,}045 &= 0{,}0191162904 \\ & \quad .\, 20 \\ log\, 1{,}045^{20} &= 0{,}3823258080 \\ \text{oder } &= 0{,}3823258 \end{aligned}$$

3233 / 25 / 18

mithin:

$$1{,}045^{20} = 2{,}41171$$

2). $log\, 900 \,.\, 1{,}045^{20} = log\, 900 + 20 \,.\, log\, 1{,}045$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 900 &= 2{,}9542425 \\ +20 \,.\, log\, 1{,}045 &= +0{,}3823258 \text{ (s. Hülfsr. 1)} \\ &\quad 3{,}3365683 \end{aligned}$$

5598 / 85 / 80

mithin:

$$900 \,.\, 1{,}045^{20} = 2170{,}54$$

3). $log \dfrac{6000 \,.\, 1{,}41171}{1{,}045^{20}} = log\, 6000 + log\, 1{,}41171 - 20 \,.\, log\, 1{,}045$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\, 1{,}41171 &= 0{,}1497424 \\ & \quad +30{,}8 \\ & \quad 0{,}1497455 \\ +log\, 6000 &= +3{,}7781513 \\ & \quad 3{,}9278968 \\ -20 \,.\, log\, 1{,}045 &= -0{,}3823258 \text{ (s. Hülfsr. 1)} \\ & \quad 3{,}5455710 \end{aligned}$$

5669 / 41 / 36,9

mithin:

$$\frac{6000 \,.\, 1{,}41171}{1{,}045^{20}} = 3512{,}13$$

lang läuft und deren Raten von je x gesucht sind.

Mit Benutzung vorstehender Formel 25 erhält man hiernach für den Barwert der Leistung des Rentenempfängers:

$$\text{a)} \ldots \quad 20000 + \frac{x \,.\, (1{,}045^{20} - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^{20}}$$

Ferner ist der Barwert der Leistung des Rentengebers gleich dem Barwert einer um 20 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente, welche ebenfalls 20 Jahre lang läuft und deren Raten je = 6000 Mark betragen.

Mit Benutzung umstehender Formel 28 erhält man also für den Barwert der Leistung des Rentengebers:

$$\text{b)} \ldots \quad \frac{6000 \,.\, (1{,}045^{20} - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^{20+20}}$$

Für x besteht hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots \quad 20000 + \frac{x \,.\, (1{,}045^{20} - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^{20}} = \frac{6000 \,.\, (1{,}045^{20} - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^{20+20}}$$

Hieraus findet man x wie folgt:

$$x \,.\, (1{,}045^{20} - 1) = \frac{6000 \,.\, (1{,}045^{20} - 1)}{1{,}045^{20}} - 20000 \,.\, 0{,}045 \,.\, 1{,}045^{20}$$

$$x \,.\, (2{,}41171 - 1) = \frac{6000 \,.\, (2{,}41171 - 1)}{1{,}045^{20}} - 900 \,.\, 1{,}045^{20} \text{ (siehe Hülfsrechnung 1)}$$

$$x \,.\, 1{,}41171 = \frac{6000 \,.\, 1{,}41171}{1{,}045^{20}} - 2170{,}54 \text{ (siehe Hülfsrechn. 2)}$$

$$x \,.\, 1{,}41171 = 3512{,}13 - 2170{,}54 \text{ (siehe Hülfsrechn. 3)}$$

$$x = \frac{1341{,}59}{1{,}41171} = \frac{134159000}{141171}$$

oder:

$$x = 950{,}34$$

Die am Schlusse eines jeden Jahres 20 Jahre lang zu zahlende Summe beträgt hiernach: 950 Mark 34 pf.

*). **Aufgabe 350.** Jemand will m (= 21) Jahre hindurch zu Anfang eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf der m (= 21) Jahre er selbst oder ein Anderer n (= 8) Jahre hindurch eine jährliche, Ende eines jeden Jahres zu zahlende Rente von r (= 600) Mark geniesse. Wie gross ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn die Zinsen zu p (= $4\frac{1}{2}$) % gerechnet werden?

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}045^8 = 8 \,.\, \log 1{,}045$

Nun ist:

$$\log 1{,}045 = 0{,}0191162904$$
$$\cdot\, 8$$
$$\log 1{,}045^8 = 0{,}1529303232$$
$$\text{oder} = 0{,}1529303$$
$$9301$$

mithin:
$1{,}045^8 = 1{,}4221$

2). $\log 1{,}045^{21} = 21 \,.\, \log 1{,}045$

Nun ist:

$$\log 1{,}045 = 0{,}0191162904$$
$$\cdot\, 21$$
$$191162904$$
$$382325808$$
$$\log 1{,}045^{21} = 0{,}4014420984$$
$$\text{oder} = 0{,}4014421$$
$$4350$$
$$71$$
$$68{,}8$$

mithin:
$1{,}045^{21} = 2{,}52024$

3). $\log x = \log 600 + \log 0{,}4221 - (\log 1{,}52024 + 9 \,.\, \log 1{,}045)$

Nun ist:

$$\log 600 = 2{,}7781513$$
$$+ \log 0{,}4221 = 0{,}6254154 - 1$$
$$3{,}4035667 - 1$$
$$\text{oder} = 2{,}4035667$$
$$-(\log 1{,}52024 + 9 \,.\, \log 1{,}045) = -0{,}3539587 \quad \text{(s. Hülfsr. 4)}$$
$$\log x = 2{,}0496180$$
$$6056$$
$$124$$
$$116$$

mithin:
$x = 112{,}103$

4). . . $\log 1{,}045 = 0{,}0191162904$

$$\cdot\, 9$$
$$0{,}1720466136$$
$$\text{oder} = 0{,}1720466$$
$$+ \log 1{,}52024 = 0{,}1819007$$
$$+ 114$$
$$0{,}3539587$$

Formel 28: $w = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}$

Formel 38: $w = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n}}$

Auflösung. Der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht darin, dass die Barwerte der gegenseitigen Leistungen einander gleich sind (s. Erkl. 220).

Da nun die jährlichen und gesuchten Zahlungen von je x des Rentenempfängers als die Raten einer vorschüssigen Jahresrente, welche m Jahre lang läuft, betrachtet werden können, so hat man nach vorstehender Formel 28 für den baren Wert der Leistung des Rentenierers:

a). . . . $\dfrac{x \,.\, (1{,}0p^m - 1)}{1{,}0p^{m-1} \,.\, 0{,}0p}$

Da ferner die Leistung des Rentengebers in einer um m Jahre aufgeschobenen Jahresrente besteht, welche n Jahre läuft und deren Raten je = r sind, so hat man nach vorstehender Formel 38 für den baren Wert dieser Leistung:

b). . . . $\dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{m+n}}$

Hiernach besteht für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $\dfrac{x \,.\, (1{,}0p^m - 1)}{1{,}0p^{m-1} \,.\, 0{,}0p} = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{m+n}}$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt:

A). . . $x = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{(1{,}0p^m - 1) \,.\, 1{,}0p^{n+1}}$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

2). . . $x = \dfrac{600 \,.\, (1{,}045^8 - 1)}{(1{,}045^{21} - 1) \,.\, 1{,}045^{8+1}}$

oder:

$x = \dfrac{600 \,.\, (1{,}4221 - 1)}{(2{,}52024 - 1) \,.\, 1{,}045^9}$ (siehe Hülfsr. 1 und 2)

$x = \dfrac{600 \,.\, 0{,}4221}{1{,}52024 \,.\, 1{,}045^9}$

mithin ist nach nebenstehender Hülfsrechn. 3:

$x = 112{,}10$

Die betreffende Person hat hiernach am Anfang eines jeden Jahres die Summe von 112 Mark und 10 pf. einzuzahlen.

*). **Aufgabe 351.** Eine Schuld von 60000 Mark soll in den ersten 10 Jahren mit 4 % verzinst und zu dieser Verzinsung, sowie zur allmäligen Tilgung der Schuld sollen halbjährlich 1500 Mark bezahlt werden. Nach diesen 10 Jahren soll soviel auf einmal abgezahlt werden, dass der Rest, wenn die Zinsen auf 5 % erhöht, durch fortgesetztes Bezahlen von halbjährlich 1500 Mark in 15 Jahren getilgt sei. Wieviel muss am Ende der ersten 10 Jahre auf einmal abgetragen werden?

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}02^{20} = 20 \,.\, log\, 1{,}02$

Nun ist:

$log\, 1{,}02 = 0{,}0086001718$ (s. Hülfstaf. II)
$\quad . 20$
$\quad 0{,}1720034360$

oder: $= 0{,}1720034$
$\quad 19896$
$\quad 138$
$\quad 146$

mithin ist:
$1{,}02^{20} = 1{,}48595$

2). $log\, 1{,}025^{30} = 30 \,.\, log\, 1{,}02$

Nun ist:

$log\, 1{,}025 = 0{,}0107238654$ (s. Hülfstaf. II)
$\quad . 30$
$\quad 0{,}3217159620$

oder: $= 0{,}3217160$
$\quad 7020$
$\quad 140$
$\quad 144{,}9$

mithin ist:
$1{,}025^{30} = 2{,}09757$

3). $log\, \frac{24{,}2975}{1{,}02^{20}} = log\, 24{,}2975 - 20 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist:

$log\, 24{,}2975 = 1{,}3855527$ (s. Hülfsr. 1).
$\quad + 89$
$\quad 1{,}3855616$
$- 20 \,.\, log\, 1{,}04 = -0{,}1720034$
$\quad 1{,}2135582$
$\quad 5443$
$\quad 139$
$\quad 133$

mithin ist:
$\frac{24{,}2975}{1{,}02^{20}} = 16{,}3515$

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 30: $w = \frac{r \,.\, \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n}}$

Formel 42: $w = \frac{r \,.\, \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \cdot 1{,}0p^a}$

Auflösung. Bei gänzlicher Tilgung der Schuld muss der Barwert (60 000 Mark) derselben gleich der Summe der Barwerte der Tilgungsquoten sein.

Die während der ersten 10 Jahre halbjährlich zu leistenden Tilgungsquoten von je 1500 Mark kann man als die Raten einer nachschüssigen halbjährlichen Rente betrachten.

Setzt man in vorstehender Formel 30:

$r = 1500$
$m = 2$
$n = 10$
$p = 4$

also: $1{,}0\frac{p}{m} = 1{,}0\frac{4}{2} = 1{,}02$ und $0{,}0\frac{p}{m} = 0{,}02$

so erhält man für den Barwert w dieser Tilgungsquote:

a). . . $w = \frac{1500 \,.\, (1{,}02^{20} - 1)}{0{,}02 \,.\, 1{,}02^{20}}$

Für den Barwert k der am Ende der 10 ersten Jahre auf einmal zu leistenden und gesuchten Tilgungssumme x, erhält man ferner nach vorstehender Formel 1ª, wenn man in derselben:

$K = x$
$p = 4$ und
$n = 10$ setzt:

b). . . $k = \frac{x}{1{,}04^{10}}$

Da man schliesslich die in den folgenden 15 Jahren halbjährlich zu leistenden Tilgungsquoten von je 1500 Mark als die Raten einer um 10 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen halbjährlichen Rente betrachten kann, so erhält man nach vorstehender Formel 42, wenn man in derselben:

Hülfsrechnungen:

4). $\log\frac{43,903}{1,025^{30}.1,04^{10}} = \log 43,903 - (30.\log 1,025 + 10.\log 1,04)$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 43,903 = & 1,6424942 \\ -(30.\log 1,025+10.\log 1,04) = & -0,4920494 \text{ (s. Hülfsr. 5)} \\ \hline & 1,1504448 \\ & 4187 \\ \hline & 261 \\ & 245,6 \\ \hline & 15,4 \\ & 15,3 \end{array}$$

mithin ist:

$$\frac{43,903}{1,025^{30}.1,05^{10}} = 14,13985$$

5). . . $30.\log 1,025 = 0,3217160$ (s. Hülfsr. 2)

$$\begin{array}{rl} +10.\log 1,104 = 10.0,0170333393 = & 0,1703334 \\ \hline & 0,4920494 \end{array}$$

6). $\log x = \log 1500 + 10.\log 1,04 + \log 10,799$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 1500 = & 3,1760913 \\ +10.\log 1,04 = 10.0,017033393 = & 0,1703334 \\ +\log 9,50865 = & 0,9781211 \\ \hline \log x = & 4,3245458 \\ & 5294 \\ \hline & 164 \\ & 164 \end{array}$$

mithin ist:

$x = 21112,8$

$$r = 1500,\quad a = 10,\quad n = 15,\quad m = 2,\quad p = 5$$

also: $1,0\frac{p}{m} = 1,0\frac{5}{2} = 1,025$ und $0,0\frac{p}{m} = 0,025$ setzt, und berücksichtigt, dass für die Zeit, um welche die gedachte Rente aufgeschoben war, nur ein Zinsfuss von 4 % in Rechnung gebracht werden darf, also für $1,0p^a = 1,04^{10}$ gesetzt werden muss, für den baren Wert w_1 dieser Rente:

$$\text{c)}. \ldots w_1 = \frac{1500.(1,025^{30}-1)}{0,025.1,025^{30}.1,04^{10}}$$

Wie vorhin erwähnt besteht hiernach für x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{1)}. \ldots 60000 = \frac{1500.(1,02^{20}-1)}{0,02.1,02^{20}} + \frac{x}{1,04^{10}} + \frac{1500.(1,025^{30}-1)}{0,025.1,025^{30}.1,04^{10}}$$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$\frac{x}{1,04^{10}} = 60000 - \frac{1500.(1,02^{20}-1)}{0,02.1,02^{20}} - \frac{1500.(1,025^{30}-1)}{0,025.1,025^{30}.1,04^{10}}$$

$$\frac{x}{1,04^{10}} = 1500.\left(40 - \frac{1,48595-1}{0,02.1,02^{20}} - \frac{2,09757-1}{0,025.1,025^{30}.1,04^{10}}\right)$$

(siehe Hülfsrechn. 1 u. 2)

$$x = 1500.1,04^{10}.\left(40 - \frac{0,48595}{0,02.1,02^{20}} - \frac{1,09757}{0,025.1,025^{30}.1,04^{10}}\right)$$

$$x = 1500.1,04^{10}\left(40 - \frac{24,2975}{1,02^{20}} - \frac{43,903}{1,025^{30}.1,04^{10}}\right)$$

$$x = 1500.1,04^{10}(40 - 16,3515 - 14,13985)$$

(siehe Hülfsrechn. 3 u. 4)

$$x = 1500.1,04^{10}.9,50865$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hülfsrechnung 6:

$$x = 21112 \text{ Mark } 80 \text{ pf.}$$

Aufgabe 352. Jemand zahlt jährlich n Jahre lang eine Summe r an eine Bank; die Bank zahlt dafür an ihn die nächsten $2n$ folgenden Jahre eine Jahresrente r_1 aus. In welchem Verhältnis muss die jährliche Rente r_1 zur jährlichen Einzahlung r stehen, damit die Werte beider gleich seien, wenn der Zinsfuss zu p % berechnet wird?

Wie gross muss ferner die Anzahl n der Jahre sein, damit die jährliche Rente r_1 wenigstens gleich der Einzahlung r sei?

Formel 28: $w = \frac{r(1,0p^n-1)}{1,0p^{n-1}.0,0p}$

Formel 40: $w = \frac{r(1,0p^n-1)}{0,0p.1,0p^{a+n-1}}$

Auflösung. Zur Lösung des 1. Teils der Aufgabe beachte man folgendes:

Die bei der Bank gemachten jährlichen Einzahlungen von je r bilden die Raten einer vorschüssigen Jahresrente; für den baren Wert w derselben hat man somit nach vorstehender Formel 28:

$$\text{a)}. \; . \; . \; w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}$$

Die Rente, welche die Bank hierfür zahlt ist eine um n Jahre aufgeschobene Jahresrente, deren Raten von je r_1 am Anfang der nächsten $2n$ Jahre fällig sind (siehe Erkl. 221).

Setzt man in vorstehender Formel 40:

$$\begin{aligned} r &= r_1 \\ n &= 2n \\ p &= p \quad \text{und} \\ a &= n \end{aligned}$$

so erhält man für den baren Wert w_1 dieser Rente:

$$\text{b)}. \; . \; . \; w_1 = \frac{r_1 \,.\, (1{,}0p^{2n} - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{n+2n-1}}$$

Da die gegenseitigen Leistungen einander gleich sein müssen, so besteht die Relation:

$$\text{1)}. \; . \; . \; \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p} = \frac{r_1 \,.\, (1{,}0p^{2n} - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{n+2n-1}}$$

Hieraus ergibt sich für das gesuchte Verhältnis $r : r_1$

$$\frac{r}{r_1} = \frac{(1{,}0p^{2n} - 1) \,.\, 1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{3n-1} \,.\, (1{,}0p^n - 1)}$$

oder:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{1{,}0p^{2n} - 1}{1{,}0p^{3n-1-(n-1)} \,.\, (1{,}0p^n - 1)}$$

mithin:

$$\text{A)}. \; . \; . \; \frac{r}{r_1} = \frac{1{,}0p^{2n} - 1}{1{,}0p^{2n} \,.\, (1{,}0p^n - 1)}$$

Zur Lösung des 2. Teils der Aufgabe beachte man, dass in der allgemeinen Lösung, siehe Gleichung A)., $r = r_1$ sein soll.

Die Gleichung A). geht dementsprechend über in:

$$\text{2)}. \; . \; . \; 1 = \frac{1{,}0p^{2n} - 1}{1{,}0p^{2n} \,.\, (1{,}0p^n - 1)}$$

Erkl. 221. In nebenstehender Auflösung wurde angenommen, dass der Rentenempfänger seine Einzahlung sofort beginnt; dass ferner der Rentengeber seine Auszahlungen 1 Jahr nach der von dem Rentenempfänger zuletzt gemachten Einzahlung beginnt.

Erkl. 222. Ein Lehrsatz aus der Lehre der Potenzen heisst:

„Das Produkt, bestehend aus der Summe zweier Zahlen und der Differenz derselben Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate beider Zahlen“

in Zeichen:

$$(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.)

Erkl. 223. Nebenstehende unrein quadratische Gleichung e).:

$$x^2 - x = 1$$

wird der Reihe nach wie folgt aufgelöst:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \,.\, x &= 1 \\ x^2 - 1 \,.\, x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 &= 1 + \tfrac{1}{4} \\ x - \tfrac{1}{2} &= \pm \sqrt{\tfrac{4+1}{4}} \\ x &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} \\ x &= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Da das negative Vorzeichen der Wurzel keinen Sinn zulässt, indem bei Benutzung desselben x negativ würde, so ist:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

und hieraus erhält man die gesuchte Anzahl n der Jahre, wie folgt:

$$1{,}0p^{2n} . (1{,}0p^n - 1) = 1{,}0p^{2n} - 1$$

Diese Gleichung ist eine Exponentialgleichung, welche sich nicht direkt durch Logarithmierung lösen lässt.

Betrachtet man den Ausdruck rechts als die Differenz zweier Quadrate, indem man $1{,}0p^{2n} = (1{,}0p^n)^2$ und $1 = 1^2$ setzt, so erhält man:

$$1{,}0p^{2n} . (1{,}0p^n - 1) = (1{,}0p^n)^2 - 1^2$$

oder nach der Erkl. 222:

$$1{,}0p^{2n} . (1{,}0p^n - 1) = (1{,}0p^n + 1) . (1{,}0p^n - 1)$$

mithin ist:

c). . . $1{,}0p^{2n} = 1{,}0p^n + 1$

setzt man nunmehr:

d). . . $1{,}0p^n = x$

also: $1{,}0p^{2n} = (1{,}0p^n)^2 = x^2$

so geht letztere Gleichung über in:

e). . . $x^2 - x = 1$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 223:

f). . . $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$

Aus den Gleich. d). und f). ergibt sich:

g). . . $1{,}0p^n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$

oder: $n . \log 1{,}0p = \log \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$

und hiernach erhält man für die gesuchte Anzahl n der Jahre:

B). . . $n = \dfrac{\log \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{\log 1{,}0p}$

als Lösung des 2. Teils der Aufgabe.

Verwandlung von Renten.

*). **Aufgabe 353.** Man soll eine nachschüssige Jahresrente, deren Raten $= r$ sind und welche n Jahre läuft, in eine andre nachschüssige Jahresrente verwandeln, deren Raten $= r_1$ sind und welche n_1 Jahre läuft, wenn bei Berechnung der 1. Rente der Zinsfuss p, bei Berechnung der 2. Rente der Zinsfuss p_1 zu Grunde gelegt wird; d. h. mit andern Worten man soll die allgemeine Beziehung aufstellen, welche zwischen den 6 Grössen r, n, p, r_1, n_1 und p besteht.

Formel 25: $w = \dfrac{r . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p . 1{,}0p^n}$

Auflösung. Soll eine Rente in eine andre verwandelt werden, so müssen die Barwerte beider Renten einander gleich sein.

Für zwei nachschüssige Jahresrenten, deren Bestimmungsstücke durch:

Erkl. 224. Mittels nebenstehend entwickelter Gleichung:

$$1)\ldots\ \frac{r\,.\,(1{,}0p^n-1)}{p\,.\,1{,}0p^n}=\frac{r_1\,.\,(1{,}0p_1^{n_1}-1)}{p_1\,.\,1{,}0p_1^{n_1}}$$

durch welche die Beziehung ausgedrückt ist, in der die Bestimmungsstücke an Barwert gleicher nachschüssiger Jahresrenten stehen, kann man alle diejenigen Aufgaben lösen, welche sich auf die Verwandlung einer nachschüssigen Jahresrente in eine andre nachschüssige Jahresrente beziehen.

Sollte z. B. eine nachschüssige Jahresrente in eine andre aber von andrer Dauer verwandelt werden, und bleibt für beide Renten der Zinsfuss derselbe, so setze man in vorstehender Gleichung 1).:

$$p=p_1$$

wonach man erhält:

$$\frac{r\,.\,(1{,}0p^n-1)}{p\,.\,1{,}0p^n}=\frac{r_1\,.\,(1{,}0p^{n_1}-1)}{p\,.\,1{,}0p^{n_1}}$$

oder:

$$a)\ldots\ r\,.\,(1{,}0p^n-1)=\frac{r_1\,.\,(1{,}0p^{n_1}-1)}{1{,}0p^{n_1-n}}$$

und diese Gleichung drückt die Beziehung aus, in welcher die Bestimmungsstücke der gedachten Renten stehen müssen. Je nachdem eine oder die andre der in dieser Gleichung vorkommenden Grössen: r, r_1, p, n und n_1 gesucht ist, wird diese Gleichung nach derselben aufgelöst. Siehe die diesbezüglichen weiteren Aufgaben.

$$w,\ r,\ p \text{ und } n$$

bezw. durch:

$$w_1,\ r_1,\ p_1 \text{ und } n_1$$

bezeichnet werden, muss sonach bei einer Verwandlung der einen in die andre nach vorstehender Formel 25 die ganz allgemeine Beziehung:

$$\frac{r\,.\,(1{,}0p^n-1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}=\frac{r_1\,.\,(1{,}0p_1^{n_1}-1)}{0{,}0p_1\,.\,1{,}0p_1^{n_1}}$$

oder:

$$1)\ldots\ \frac{r\,.\,(1{,}0p^n-1)}{p\,.\,1{,}0p^n}=\frac{r_1\,.\,(1{,}0p_1^{n_1}-1)}{p_1\,.\,1{,}0p_1^{n_1}}$$

bestehen.

Aufgabe 354. Jemand bezieht auf 25 Jahre eine Jahresrente von 1500 ℳ. Diese Summe reicht aber zu seinem Unterhalte nicht aus und er wünscht deshalb jährlich 1800 ℳ zu beziehen.

Wie lange wird ihm diese Summe ausgezahlt werden können, die Zinsen zu $4^3/_4$ % gerechnet?

Formel 25: $w=\dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n-1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}$

Auflösung. Dem Sinn der Aufgabe gemäss ist eine nachschüssige Jahresrente, welche 25 Jahre läuft und deren Raten je 1500 Mark betragen in eine andre nachschüssige Jahresrente umzuwandeln, welche x Jahre läuft und deren Raten je 1800 Mark betragen.

Setzt man in vorstehender Formel 25:

einmal:	ein andermal:
$r=1500$	$r=1800$
$n=25$	$n=x$
$p=4\frac{3}{4}=4{,}75$	$p=4\frac{3}{4}=4{,}75$
also $1{,}0p=1{,}0475$	also $1{,}0p=1{,}0475$
und $0{,}0p=0{,}0475$	und $0{,}0p=0{,}0475$

und berücksichtigt man, dass nach der

vorigen allgemeinen Aufgabe die hiernach erhaltenen Barwerte einander gleich sein müssen, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots \quad \frac{1500 \cdot (1{,}0475^{25} - 1)}{0{,}0475 \cdot 1{,}0475^{25}} = \frac{1800 \cdot (1{,}0475^{x} - 1)}{0{,}0475 \cdot 1{,}0475^{x}}$$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$\frac{5 \cdot (1{,}0475^{25} - 1)}{1{,}0475^{25}} = \frac{6 \cdot (1{,}0475^{x} - 1)}{1{,}0475^{x}}$$

$$\frac{5 \cdot (3{,}19044 - 1)}{1{,}0475^{25}} = \frac{6 \cdot 1{,}0475^{x} - 6}{1{,}0475^{x}}$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

$$\frac{5 \cdot 2{,}19044}{1{,}0475^{25}} = 6 - \frac{6}{1{,}0475^{x}}$$

$$\frac{6}{1{,}0475^{x}} = 6 - 3{,}4328 \quad \text{(siehe Hülfsrechn. 2)}$$

$$\frac{6}{1{,}0475^{x}} = 2{,}5672$$

$$1{,}0475^{x} = \frac{6}{2{,}5672}$$

$$x \cdot \log 1{,}0475 = \log 6 - \log 2{,}5672$$

$$x = \frac{\log 6 - \log 2{,}5672}{\log 1{,}0475}$$

$$x = \frac{0{,}7781513 - 0{,}4094597}{0{,}0201540}$$

$$x = \frac{0{,}3686916}{0{,}0201540} = \frac{3686916}{201540}$$

oder:

$$x = 18{,}294$$

Die Summe von 1800 Mark wird hiernach 18,294 Jahre lang ausbezahlt werden können. In betreff des Jahresbruchteils 0,294 beachte man, dass wie in der Aufgabe 342 erwähnt, die am Ende des 18. Jahres fällige Summe von 1800 Mark um einen solchen Betrag erhöht werden muss, welcher jenem Jahresbruchteil entspricht.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}0475^{25} = 25 \cdot \log 1{,}0475$

Nun ist:

$$\begin{array}{rrl} \log 1{,}0475 = & 0{,}0201540316 & \text{(s. Hülfstaf. II)} \\ & \cdot\, 25 & \\ \hline & 1007701580 & \\ & 403080632 & \\ \hline & 0{,}5038507900 & \\ \text{oder} = & 0{,}5038508 & \\ & 8151 & \\ \hline & 57 & \\ & 54{,}4 & \end{array}$$

mithin ist:

$$1{,}0475^{25} = 3{,}19044$$

2). $\log \frac{5 \cdot 2{,}19044}{1{,}0475^{25}} = \log 5 + \log 2{,}19044 - 25 \cdot \log 1{,}0475$

Nun ist:

$$\begin{array}{rrl} \log 2{,}19044 = & 0{,}3405234 & \\ & +\, 79{,}6 & \\ + \log 5 = & 0{,}6989700 & \\ \hline & 1{,}0395014 & \\ -25 \cdot \log 1{,}0475 = & -0{,}5038508 & \text{(s. Hülfsr. 1).} \\ \hline & 0{,}5356506 & \\ & 6485 & \\ \hline & 21 & \end{array}$$

mithin ist:

$$\frac{5 \cdot 2{,}19044}{1{,}0475^{25}} = 3{,}4328$$

*) **Aufgabe 355.** Eine nachschüssige Jahresrente von r (= 600) Mark, welche n (= 20) Jahre lang fällig ist, soll in eine andre umgewandelt werden, welche n_1 (= 25) Jahre lang am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ (= $\frac{1}{4}$) Jahres zahlbar ist. Wie gross wird eine Rate r_1 der neuen Rente sein, wenn die Jahreszinsen zu p (= 4%) gerechnet werden?

Erkl. 225. Ist der Prozentsatz für die in der Aufgabe 355 erwähnte nachschüssige Jahresrente $= p$, der Prozentsatz für die nachschüssige Jahresrente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind $= p_1$, so geht nebenstehende Gleichung 1). über in:

$$\text{a).}\ \ldots\ \frac{r\cdot(1{,}0p^n-1)}{p\cdot 1{,}0p^n}=\frac{r_1\cdot\left(1{,}0\frac{p_1}{m}^{m\cdot n_1}-1\right)}{\frac{p_1}{m}\cdot 1{,}0\frac{p_1}{m}^{m\cdot n_1}}$$

Mittels dieser Gleichung, durch welche die Beziehung ausgedrückt ist, in der die Bestimmungsstücke einer nachschüssigen Jahresrente und einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind, stehen, wenn die Barwerte beider Renten gleich sind, kann man alle diejenigen Aufgaben lösen, welche sich auf die Umwandlung der einen dieser Renten in die andre beziehen. Siehe Erkl. 224.

Erkl. 226. Nimmt man den Zinsfuss für das $\frac{1}{m}$ Jahr nicht wie es im bürgerlichen Leben gebräuchlich ist, proportional dem Jahresbruchteil $\frac{1}{m}$, also nicht $= \frac{p}{m}$ an, sondern setzt für den Zinsfuss des $\frac{1}{m}$ Jahres, wie es streng genommen auch mathematisch richtig ist:

$$= 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}-1\right)$$

(siehe Formel 21, Erkl. 115)

so erhält man für den Zinsfaktor q_1 für ein solches $\frac{1}{m}$ Jahr, d. i. der Wert der Geldeinheit nach $\frac{1}{m}$ Jahr:

$$q_1=\frac{100+100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}-1\right)}{100}$$

$$q_1=1+\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}-1=\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

oder:

$$\text{a).}\quad q_1=\sqrt[m]{1{,}0p}$$

und nebenstehende allgemeine Lösung geht über in:

$$\text{b).}\quad r_1=\frac{r\cdot(1{,}0p^n-1)\cdot 100\left(\sqrt[m]{1{,}0p}-1\right)\cdot\left(\sqrt[m]{1{,}0p}\right)^{m\cdot n_1}}{p\cdot 1{,}0p^n\cdot\left(\left(\sqrt[m]{1{,}0p}\right)^{m\cdot n_1}-1\right)}$$

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

Formel 25: $$w=\frac{r\cdot(1{,}0p^n-1)}{0{,}0p\cdot 1{,}0p^n}$$

Formel 30: $$w=\frac{r\cdot\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n}-1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}\cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n}}$$

Auflösung. Die Barwerte beider Renten müssen einander gleich sein.

Mit Benutzung vorstehender Formeln 25 und 30 erhält man hiernach, wenn man in Formel 30:

$$r=r_1$$
$$n=n_1$$

setzt, zwischen den Bestimmungsstücken beider Renten die allgemeine Beziehung:

$$\frac{r\cdot(1{,}0p^n-1)}{0{,}0p\cdot 1{,}0p^n}=\frac{r_1\cdot\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n_1}-1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}\cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n_1}}$$

oder:

$$1).\ldots\ \frac{r\cdot(1{,}0p^n-1)}{p\cdot 1{,}0p^n}=\frac{r_1\cdot\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n_1}-1\right)}{\frac{p}{m}\cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n_1}}$$

Diese Gleichung nach r_1 aufgelöst, erhält man:

$$2).\ldots\ r_1=\frac{r\cdot(1{,}0p^n-1)\cdot\frac{p}{m}\cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n_1}}{p\cdot 1{,}0p^n\cdot\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m\cdot n_1}-1\right)}$$

(siehe Erkl. 225 u. 226)

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach, wenn

$$r=600$$
$$n=20$$
$$n_1=25$$
$$m=4$$
$$p=4$$
$$\text{also: } 1{,}0p=1{,}04$$
$$\frac{p}{m}=\frac{4}{4}=1$$
$$\text{und } 1{,}0\frac{p}{m}=1{,}01$$

gesetzt wird:

$$3).\ldots\ r_1=\frac{600\cdot(1{,}04^{20}-1)\cdot 1\cdot 1{,}01^{4\cdot 25}}{4\cdot 1{,}04^{20}\cdot(1{,}01^{4\cdot 25}-1)}$$

oder:

$$r_1 = \frac{600 \cdot (1{,}04^{20}-1) \cdot 100 (\sqrt[4]{1{,}04}-1) \cdot (\sqrt[4]{1{,}04})^{4 \cdot 25}}{4 \cdot 1{,}04^{20} \cdot ((\sqrt[4]{1{,}04})^{4 \cdot 25}-1)}$$

oder:

$$r_1 = \frac{600 \cdot (1{,}04^{20}-1) \cdot (\sqrt[4]{1{,}04}-1) \cdot 1{,}04^{25}}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{20} \cdot (1{,}04^{25}-1)}$$

$$r_1 = \frac{600 \cdot 1{,}04^{25} \cdot (1{,}04^{20}-1) \cdot (\sqrt[4]{1{,}04}-1)}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{20} \cdot (1{,}04^{25}-1)}$$

c). $$r_1 = \frac{600 \cdot 1{,}04^{5} \cdot (1{,}04^{20}-1) \cdot (\sqrt[4]{1{,}04}-1)}{0{,}04 \cdot (1{,}04^{25}-1)}$$

und hieraus findet man:

d). $r_1 = 128{,}578$

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}04^{20} = 20 \cdot log\, 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 1{,}04 = & 0{,}0170333393 \text{ (s. Hülfstaf. II)} \\ & \cdot\, 20 \\ \hline & 0{,}3406667860 \\ \text{oder} = & 0{,}3406668 \\ & 6622 \\ \hline & 46 \\ & 19{,}6 \end{array}$$

mithin ist:
$1{,}04^{20} = 2{,}19112$

2). $log\, 1{,}01^{100} = 100 \cdot log\, 1{,}01$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 1{,}01 = & 0{,}0043213738 \text{ (s. Hülfstaf. II)} \\ & \cdot\, 100 \\ \hline & 0{,}4321373800 \\ \text{oder} = & 0{,}4321374 \\ & 1352 \\ \hline & 22 \\ & 16 \\ \hline & 6 \end{array}$$

mithin ist:
$1{,}01^{100} = 2{,}70481$

3). . . . $$\begin{array}{rl} log\, 1{,}70481 = & 0{,}2316734 \\ & +\, 25{,}5 \\ +\, 20 \cdot log\, 1{,}04 = & 0{,}3406668 \text{ (s. Hülfsr. 1).} \\ \hline & 0{,}5723428 \end{array}$$

Erkl. 227. Vergleicht man die Resultate, welche man nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Rechnungsart, siehe nebenstehende Auflösung, und nach der streng mathematisch richtigen Rechnungsart erhält, siehe Erkl. 226, so findet man, dass erstere ein Resultat ergibt, welches um

79 pf.

grösser ist, als das Resultat nach der letzteren angegebenen Rechnungsart.

$$r_1 = \frac{150 \cdot (1{,}04^{20}-1) \cdot 1{,}01^{100}}{1{,}04^{20} \cdot (1{,}01^{100}-1)}$$

$$r_1 = \frac{150 \cdot (2{,}19112-1) \cdot 1{,}01^{100}}{1{,}04^{20} \cdot (2{,}70481-1)}$$

(siehe Hülfsrechn. 1 u. 2)

$$r_1 = \frac{150 \cdot 1{,}19112 \cdot 1{,}01^{100}}{1{,}04^{20} \cdot 1{,}70481}$$

$$log\, r_1 = log\, 150 + log\, 1{,}19112 + 100 \cdot log\, 1{,}01 - (20 \cdot log\, 1{,}04 + log\, 1{,}70481)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 150 = & 2{,}1760913 \\ +\, log\, 1{,}19112 = & 0{,}0759482 \\ & +\, 73 \\ +\, 100 \cdot log\, 1{,}01 = & 0{,}4321374 \text{ (s. Hülfsrechn. 2).} \\ \hline & 2{,}6841842 \\ -\, (20 \cdot log\, 1{,}04 + log\, 1{,}70481) = & -\, 0{,}5723428 \text{ (s. Hülfsrechn. 3).} \\ \hline log\, r_1 = & 2{,}1118414 \\ & 8336 \\ \hline & 78 \\ & 67 \end{array}$$

mithin ist:
$r_1 = 129{,}372$

Die gesuchte Rente beträgt hiernach: 129 Mark 37 pf. (siehe Erkl. 227).

*). **Aufgabe 356.** Es wird die Rate r_1 einer aufgeschobenen Jahresrente gesucht, welche nach a Jahren zum erstenmale und dann b Jahre hindurch jährlich zahlbar ist und die an barem Wert einer nachschüssigen Jahresrente r auf n Jahre gleich ist, wenn beide zum Zinsfuss p gerechnet werden; wie gross muss jene Rente r_1 sein?

Formel 40: $w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n-1}}$

Formel 25: $w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Die in der Aufgabe erwähnte erste Rente ist eine um a Jahre aufgeschobene vorschüssige Jahresrente, da gesagt ist, dass nach a Jahren zum erstenmal diese Rente zahlbar ist.

Der Aufgabe gemäss erhält man mittels vorstehender Formeln 40 und 25, wenn in Formel 40:

$$r = r_1 \text{ und}$$
$$n = b$$

gesetzt wird, die Relation:

$$1). \;.\;.\; \frac{r_1 \,.\, (1{,}0p^b - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+b-1}} = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$$

und hieraus ergibt sich:

$$r_1 = r \cdot \frac{(1{,}0p^n - 1) \,.\, 1{,}0p^{a+b-n-1}}{1{,}0p^b - 1}$$

Aufgabe 357. Jemand hat n (= 15) Jahre lang eine Rente r (= 2500) Mark zu geniessen; wie lang muss er ihrem Genusse entsagen, um dann n_1 (= 12) Jahre hindurch eine Rente r_1 (= 3500) Mark beanspruchen zu können, wenn die Zinseszinsen zu p (= $3\frac{1}{2}$) % gerechnet werden?

Formel 25: $w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Formel 38: $w = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{a+n}}$

Auflösung. Der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht darin, dass die in der Aufgabe zuerst erwähnte nachschüssige Jahresrente in eine andre um x Jahre aufgeschobene nachschüssige Jahresrente zu verwandeln ist.

Mittels vorstehenden Formeln 25 und 38 erhält man hiernach, wenn man in Formel 38:

$$r = r_1$$
$$n = n_1 \text{ und}$$
$$a = x$$

setzt, die Bestimmungsgleichung:

$$1). \;.\;.\; \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n} = \frac{r_1 \,.\, (1{,}0p^{n_1} - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{x+n_1}}$$

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}035^{15} = 15 \,.\, log\, 1{,}035$

Nun ist:

$log\, 1{,}035 = 0{,}0149403498$ (s. Hülfstaf. II)
. 15

747017490
149403498

0,2241052470

oder = 0,2241052
0926
126
129,5

mithin:
$1{,}035^{15} = 1{,}67535$

Hülfsrechnungen:

2). $\log 1{,}035^{15-12} = \log 1{,}035^3 = 3 \, . \log 1{,}035$

Nun ist:

$$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$.3$$
$$0{,}0448209$$
$$\begin{array}{r}8140\\ \hline 69\\ 78{,}4\end{array}$$

mithin:

$1{,}035^3 = 1{,}10872$

3). $1{,}035^{15} - 1{,}035^{15-12} = 1{,}67535 - 1{,}10872$ (s. Hülfsr. 1 u. 2)

$= 0{,}56663$

4). $1{,}035^{15} - 1 = 1{,}67535 - 1$

$= 0{,}67535$ (s. Hülfsr. 1).

5). $\log 0{,}56663 = 0{,}7532996 - 1$

$+ \log 3500 = 3{,}5440680$

$4{,}2973676 - 1$

oder $= 3{,}2973676$

6). $\log 0{,}67535 = 0{,}8295289 - 1$

$+ \log 2500 = 3{,}3979400$

$4{,}2274689 - 1$

oder $= 3{,}2274689$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$\frac{r \, . (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n} = \frac{r_1 \, . (1{,}0p^{n_1} - 1)}{1{,}0p^x \, . \, 1{,}0p^{n_1}}$$

$$1{,}0p^x = \frac{r_1 \, . (1{,}0p^{n_1} - 1) \, . \, 1{,}0p^n}{r \, . (1{,}0p^n - 1) \, . \, 1{,}0p^{n_1}}$$

$$1{,}0p^x = \frac{r_1 \, . (1{,}0p^{n_1} - 1) \, . \, 1{,}0p^{n-n_1}}{r \, . (1{,}0p^n - 1)} = \frac{r_1 \left(1{,}0p^n - 1{,}0p^{n-n_1}\right)}{r \, . (1{,}0p^n - 1)}$$

$$x \, . \log 1{,}0p = \log r_1 + \log \left(1{,}0p^n - 1{,}0p^{n-n_1}\right) - \log \left(1{,}0p^n - 1\right) - \log r$$

oder:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{\log(1{,}0p^n - 1{,}0p^{n-n_1}) - \log(1{,}0p^n - 1) + \log r_1 - \log r}{\log 1{,}0p}$$

und dies ist die **allgemeine** Lösung der Aufgabe.

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man hiernach:

$$x = \frac{\log(1{,}035^{15} - 1{,}035^{15-12}) - \log(1{,}035^{15} - 1) + \log 3500 - \log 250}{\log 1{,}035}$$

oder:

$$x = \frac{\log 0{,}56663 - \log 0{,}67535 + \log 3500 - \log 250}{\log 1{,}035}$$

(siehe Hülfsrechn. 3 u.

$$x = \frac{3{,}2973676 - 3{,}2274689}{0{,}0149403}$$ (siehe Hülfsrechn. 5 u.

$$x = \frac{0{,}0698787}{0{,}0149403} = \frac{698787}{149403}$$

mithin:

$$\text{B)} \ldots \; x = 4{,}678$$

Die betreffende Person muss hiernach 4,678 Jahre lang dem Genusse der ersten Rente entsagen, um die gewünschte zweite Rente beziehen zu können.

*). **Aufgabe 358.** Ein Rentner will eine erst nach 8 Jahren beginnende und durch 16 Jahre dauernde, jedesmal zu Beginn des Jahres fällige Rente von 1400 Mark mit einer andern vertauschen, die erst nach 12 Jahren und jedesmal zu Beginn eines halben Jahres fällig ist und zwar durch 32 halbe Jahre.

Wie gross wird dieser halbjährliche Rentenbezug sein, wenn die Rentenanstalt 4 % Zinseszinsen berechnet?

Formel 40: $$w = \frac{r \, . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \, . \, 1{,}0p^{a+n-1}}$$

Formel 44: $$w = \frac{r \, . \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1} \cdot 1{,}0p^a}$$

Auflösung. Die Barwerte beider Renten müssen einander gleich sein. Setzt

man daher in vorstehende Formel 40, welches die entsprechende Rentenformel für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente ist:

$$r = 1200$$
$$n = 16$$
$$a = 8$$
$$p = 4$$

also: $1{,}0p = 1{,}04$ und $0{,}0p = 0{,}04$

und in vorstehende Formel 44, welches die entsprechende Rentenformel für eine aufgeschobene vorschüssige Rente ist, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind:

$$r = x$$
$$n = \frac{32}{2} = 16$$
$$a = 12$$
$$m = 2$$
$$p = 4$$

also: $1{,}0\frac{p}{m} = 1{,}0\frac{4}{2} = 1{,}02$ und $0{,}0\frac{p}{m} = 0{,}02$

so besteht für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $$\frac{x \cdot (1{,}02^{2 \cdot 16} - 1)}{0{,}02 \cdot 1{,}02^{2 \cdot 16 - 1} \cdot 1{,}04^{12}} = \frac{1200 \cdot (1{,}04^{16} - 1)}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{8+16-1}}$$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$\frac{x \cdot (1{,}02^{32} - 1)}{2 \cdot 1{,}02^{31} \cdot 1{,}04^{12}} = \frac{1200 \cdot (1{,}04^{16} - 1)}{4 \cdot 1{,}04^{23}}$$

$$x = \frac{1200 \cdot (1{,}04^{16} - 1) \cdot 2 \cdot 1{,}02^{31} \cdot 1{,}04^{12}}{4 \cdot 1{,}04^{23} \cdot (1{,}02^{32} - 1)} = \frac{600 \cdot (1{,}04^{16} - 1) \cdot 1{,}02^{31}}{1{,}04^{11} \cdot (1{,}02^{32} - 1)}$$

$$x = \frac{600 \cdot 0{,}87298 \cdot 1{,}02^{31}}{1{,}04^{11} \cdot 0{,}88454} \quad \text{(s. Hülfsrechn. 1 u. 2)}$$

$$\log x = \log 600 + \log 0{,}87298 + 31 \cdot \log 1{,}02 - (11 \cdot \log 1{,}04 + \log 0{,}88454)$$

Nun ist: $\log 1{,}02 = 0{,}0086001718$ (s. Hülfstaf. II)

$$\begin{array}{rl} & 0{,}0086001718 \\ & .\,31 \\ \hline & 86001718 \\ & 258005154 \\ \hline & 0{,}2666053258 \\ \text{oder} = & 0{,}2666053 \\ +\log 0{,}87298 = & 0{,}9410043 - 1 \\ +\log 600 = & 2{,}7781513 \\ \hline & 3{,}9857609 - 1 \\ \text{oder} = & 2{,}9857609 \\ -(11 \cdot \log 1{,}04 + \log 0{,}88454) = & -0{,}1340842 \quad \text{(s. Hülfsr. 3)} \\ \log x = & 2{,}8516767 \end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{r} 6741 \\ \hline 26 \\ 24{,}4 \end{array}$$

$$x = 710{,}684$$

Der gesuchte halbjährliche Rentenbezug beträgt hiernach: 710 ℳ 68 pf.

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}04^{16} = 16 \cdot \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333393 \quad \text{(s. Hülfstaf. II)} \\ & .\,16 \\ \hline & 1022000358 \\ & 170333393 \\ \hline & 0{,}2725334288 \\ \text{oder} = & 0{,}2725334 \end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{r} 5146 \\ \hline 188 \\ 185{,}6 \end{array}$$

$$1{,}04^{16} = 1{,}87298$$

und

$$1{,}04^{16} - 1 = 1{,}87298 - 1 = 0{,}87298$$

2). $\log 1{,}02^{32} = 32 \cdot \log 1{,}02$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}02 = & 0{,}0086001718 \\ & .\,32 \\ \hline & 172003436 \\ & 258005154 \\ \hline & 0{,}2752054976 \\ \text{oder} = & 0{,}2752055 \end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{r} 1961 \\ \hline 94 \\ 92{,}4 \end{array}$$

$$1{,}02^{32} = 1{,}88454$$

und

$$1{,}02^{32} - 1 = 1{,}88454 - 1 = 0{,}88454$$

3). $$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333393 \\ & .\,11 \\ \hline & 170333393 \\ & 170333393 \\ \hline & 0{,}1873667323 \\ \text{oder} = & 0{,}1873667 \\ +\log 0{,}88454 = & 0{,}9467175 - 1 \\ \hline & 1{,}1340842 - 1 \\ \text{oder} = & 0{,}1340842 \end{array}$$

*). **Aufgabe 359.** Jemand kauft eine 4prozentige Rente von 2000 Mark auf 20 Jahre unter der Bedingung, dass wenn der Zinsfuss sich ändern sollte, auch die Rente eine Umwandlung erleide und dass, im Falle er vor Ablauf der Zeit sterbe, der Wert, welchen der Rest der Rente repräsentiert, an seine Erben auszuzahlen sei. Nach 8 Jahren steigt der Zinsfuss um $^1/_2$ $^0/_0$ und 5 Jahre später stirbt der Rentner. Man soll berechnen:

a) die Mise jener Rente,
b) die Rate der Rente vom 8. Jahre ab,
c) die den Erben auszuzahlende Summe.

Hülfsrechnungen:

1). $log\,1{,}04^{20} = 20 \,.\, log\,1{,}04$

Nun ist:

$$log\,1{,}04 = 0{,}0170333393$$
$$.\,20$$
$$0{,}3406667860$$

oder $= 0{,}3406668$

6622
46
39,6

mithin:

$$1{,}04^{20} = 2{,}19112$$

und:

$$1{,}04^{20} - 1 = 2{,}19112 - 1 = 1{,}19112$$

2). $log\,x = log\,50000 + log\,1{,}19112 - 20 \,.\, log\,1{,}04$

Nun ist:

$$log\,500000 = 4{,}6989700$$
$$+ log\,1{,}19112 = 0{,}0759482$$
$$+ 73$$
$$4{,}7749255$$
$$- 20 \,.\, log\,1{,}04 = -0{,}3406668 \text{ (s. Hülfsr. 1)}$$
$$log\,x = 4{,}4342587$$

2495
92
79,5
12,5
11,1

mithin:

$$x = 27180{,}57$$

Formel 25: $w = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung a). Die zur Berechnung der gesuchten Mise x (des baren Werts) der Rente kann mittels vorstehender Formel 25 direkt geschehen.

Setzt man in derselben:

$$r = 2000$$
$$n = 20$$
$$p = 4$$
$$w = x$$

so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots x = \frac{2000 \,.\, (1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{20}}$$

Hieraus findet man nach nebenstehender Hülfsrechnung 1:

$$x = \frac{5000 \,.\, 1{,}19112}{1{,}04^{20}}$$

oder nach Hülfsrechnung 2:

$$x = 27180{,}57$$

Die Mise der Rente beträgt sonach: 27180 Mark 57 pf.

Auflösung b). Zur Berechnung der gesuchten Rate y beachte man, dass der Sinn der diesbezüglichen anzusetzenden Bestimmungsgleichung in der Verwandlung zweier Renten besteht.

Die ursprüngliche nachschüssige Jahresrente von 2000 Mark hat noch 20 minus 8 oder 12 Jahre lang zu laufen, da nun der Zinsfuss um $^1/_2$ $^0/_0$ steigt, so muss die Rente eine Aenderung erleiden, bezw. in eine andre Rente übergehen und zwar so, dass die Barwerte beider Renten gleich sind. Setzt man in vorstehender Formel 25:

einmal:	ein andermal:
$r = 2000$	$r = y$
$p = 4$	$p = 4^1/_2 = 4{,}5$
$n = 12$	$n = 12$

so erhält man hiernach für y die Bestimmungsgleichung:

Hülfsrechnungen:

3). $log\, 1{,}045^{12} = 12 \,.\, log\, 1{,}045$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 1{,}045 = & 0{,}0191162904 \\ & .\, 12 \\ \hline & 382325808 \\ & 191162904 \\ \hline & 0{,}2293954848 \\ \text{oder} = & 0{,}2293955 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3746 \\ \hline 209 \\ 204{,}8 \end{array}$$

mithin:

$1{,}045^{12} = 1{,}69588$

und:

$1{,}045^{12} - 1 = 1{,}69588 - 1 = 0{,}69588$

4). $log\, 1{,}04^{12} = 12 \,.\, log\, 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 1{,}04 = & 0{,}0170333393 \\ & .\, 12 \\ \hline & 340666786 \\ & 170333393 \\ \hline & 0{,}2044000716 \\ \text{oder} = & 0{,}2044001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3913 \\ \hline 88 \\ 81{,}6 \end{array}$$

mithin:

$1{,}04^{12} = 1{,}60103$

und:

$1{,}04^{12} - 1 = 1{,}60103 - 1 = 0{,}60103$

5). . . . $12 \,.\, log\, 1{,}04 = 0{,}2044001$ (s. Hülfsr. 4).

$$\begin{array}{rl} + log\, 0{,}69588 = & 0{,}8425344 - 1 \\ \hline & 1{,}0469345 - 1 \\ \text{oder} = & 0{,}0469345 \end{array}$$

6). $log\, 1{,}045^7 = 7 \,.\, log\, 1{,}045$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 1{,}045 = & 0{,}0191163 \\ & .\, 7 \\ \hline & 0{,}1338141 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7943 \\ \hline 198 \\ 191{,}4 \end{array}$$

mithin:

$1{,}045^7 = 1{,}36086$

und

$1{,}045^7 - 1 = 1{,}36086 - 1 = 0{,}36086$

7). $log\, 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$

$$\begin{array}{rl} + 7 \,.\, log\, 1{,}045 = & 0{,}1338141 \text{ (s. Hülfsr. 6).} \\ \hline & 0{,}7870266 - 2 \end{array}$$

2). . . $$\frac{y \,.\, (1{,}045^{12} - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^{12}} = \frac{2000 \,.\, (1{,}04^{12} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{12}}$$

Hieraus findet man y wie folgt:

$$y = \frac{50000 \,.\, (1{,}04^{12} - 1) \,.\, 0{,}045 \,.\, 1{,}045^{12}}{1{,}04^{12} \,.\, (1{,}045^{12} - 1)}$$

$$y = \frac{2250 \,.\, 1{,}045^{12} \,.\, (1{,}04^{12} - 1)}{1{,}04^{12} \,.\, (1{,}045^{12} - 1)}$$

$$y = \frac{2250 \,.\, 1{,}045^{12} \,.\, 0{,}60103}{1{,}04^{12} \,.\, 0{,}69588} \quad \text{(s. Hülfsrechn. 3 und 4)}$$

$log\, y = log\, 2250 + 12 \,.\, log\, 1{,}045 + log\, 0{,}60103 - (12 \,.\, log\, 1{,}04 + log\, 0{,}69588)$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} log\, 2250 = & 3{,}3521825 \\ + 12 \,.\, log\, 1{,}045 = & 0{,}2293955 \text{ (s. Hülfsr. 3)} \\ + log\, 0{,}60103 = & 0{,}7788962 - 1 \\ \hline & 4{,}3604742 - 1 \\ \text{oder} = & 3{,}3604742 \\ - (12 \,.\, log\, 1{,}04 + log\, 0{,}69588) = & - 0{,}0469345 \text{ (s. Hülfsr. 5)} \\ \hline log\, y = & 3{,}3135397 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5298 \\ \hline 99 \\ 84{,}4 \\ \hline 14{,}6 \end{array}$$

mithin:

$y = 2058{,}447$

Die Rate der Rente beträgt hiernach vom 8. Jahre ab: 2058 Mark 45 pf.

Auflösung c). Zur Berechnung der gesuchten Summe z, welche nach dem Ableben des Rentenkäufers an dessen Erben ausbezahlt wird, beachte man, dass nach dem Tode desselben die Rentenanstalt noch $20 - 8 - 5$ also noch 7 Jahre lang, die in vorstehender Auflösung b). berechnete 4½prozentige Rente von 2058 Mark 45 pf. zu zahlen hätte und den Barwert dieser noch fälligen Rentenbezüge an die Erben des Rentners auszahlen muss.

Setzt man in vorstehende Formel 25:

$$\begin{aligned} w &= z \\ r &= 2058{,}45 \\ p &= 4{,}5 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

so erhält man für z die Bestimmungsgleichung:

3). . . . $$z = \frac{2058{,}45 \,.\, (1{,}045^7 - 1)}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^7}$$

Hieraus findet man z, wie folgt:

$$z = \frac{2058{,}45 \,.\, 0{,}36086}{0{,}045 \,.\, 1{,}045^7}$$

$$\log z = \log 2058{,}45 + \log 0{,}36086 - (\log 0{,}045 + 7 . \log 1{,}045)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 2058{,}45 &= 3{,}3135397 \text{ (siehe d. Auflös. b)} \\ + \log 0{,}36086 &= 0{,}5573387 - 1 \\ \hline & 3{,}8708784 - 1 \\ \text{oder} &= 2{,}8708784 \\ -(\log 0{,}045 + \log 1{,}045^7) &= +0{,}7870266 - 2 \\ & \;\; - \quad\quad\quad + \\ \hline \log z &= 2{,}0838518 + 2 \\ \text{oder} &= 4{,}0838518 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8250 \\ \hline 268 \\ 250{,}6 \\ \hline 17{,}4 \\ 17{,}9 \end{array}$$

mithin:

$$z = 12129{,}75$$

Nach dem Tode des Rentners erhalten hiernach dessen Erben:
12129 Mark 75 pf.

Aufgabe 360. Jemand will an eine Rentenbank am Anfange eines jeden Jahres n Jahre nach einander eine gewisse Summe r entrichten, und sich hierdurch eine vom m^{ten} Jahre nach der zuletzt gemachten Einzahlung beginnende vorschüssige Jahresrente erwerben, deren Raten r_1 während n_1 Jahre fällig sind.

Wie hoch müssen jene jährlichen Einzahlungen r sein, wenn die Bank für vereinnahmte Gelder den Zinsfuss p %, für verausgabte Gelder den Zinsfuss p_1 % ihrer Berechnung zu Grunde legt?

Formel 29: $W = \dfrac{r . 1{,}0p . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 41: $W = \dfrac{r . 1{,}0p . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 1ᵃ: $K = k . 1{,}0p^n$

Auflösung. Während der Dauer des gegenseitigen Rechtsverhältnisses ist der Aufgabe gemäss das Geld, welches die Bank vereinnahmt zu p %, das welches sie verausgabt zu p_1 % zu verzinsen. Um in Berücksichtigung dessen zu einer Relation zwischen den in der Aufgabe gegebenen und gesuchten Stücken zu kommen, berücksichtige man hier, dass die Endwerte der gegenseitigen Leistungen gleich sein müssen.

Die am Anfang eines jeden der n ersten Jahre bei der Bank gemachten Einzahlungen von je r bilden die Raten einer vorschüssigen Jahresrente. Für den Wert dieser von der Bank vereinnahmten Gelder am Ende des n^{ten} Jahres hat man somit nach vorstehender Formel 29:

$$\frac{r . 1{,}0p . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Da das gegenseitige Rechtsverhältnis der Aufgabe gemäss noch $m+n$ Jahre weiter fortbesteht, so erhält man nach vorstehender Formel 1ª für den Endwert der von der Bank vereinnahmten Gelder

$$\text{a)}\ldots \quad \frac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \cdot 1{,}0p^{m+n}$$

Die von der Bank verausgabten Gelder bestehen in der vorschüssigen Jahresrente r_1, welche n_1 Jahre läuft. Für den Endwert derselben hat man nach vorstehender Formel 41, wenn man in derselben $r = r_1$, $p = p_1$, $n = n_1$ setzt:

$$\text{b)}\ldots \quad \frac{r_1 \,.\, 1{,}0p_1 \,.\, (1{,}0p_1^{n_1} - 1)}{0{,}0p_1}$$

Zur Berechnung der gesuchten Einzahlungen von je r hat man hiernach die Gleichung:

$$1)\ldots \quad \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \cdot 1{,}0p^{m+n} = \frac{r_1 \,.\, 1{,}0p_1 \,.\, (1{,}0p_1^{n_1} - 1)}{0{,}0p_1}$$

hieraus ergibt sich:

$$r = r_1 \cdot \frac{p \,.\, (1{,}0p_1^{n_1} - 1) \,.\, 1{,}0p_1}{p_1 \,.\, (1{,}0p^n - 1) \,.\, 1{,}0p^{m+n+1}}$$

*). **Aufgabe 361.** A soll nach vollendetem 20. Jahre durch 4 Jahre hintereinander eine jährliche Rente von 600 Mark aus einer Rentenkasse erhalten. Wie gross muss die 20mal an die Rentenbank zu leistende jährliche Einzahlung von Geburt des A bis zum Eintritt in das 20. Lebensjahr sein, wenn die Rentenbank vereinnahmte Gelder mit 3 % und verausgabte mit 5 % verrechnet?

Formel 29: $W = \dfrac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 41: $W = \dfrac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung. Die von Geburt des A ab alljährlich bei der Rentenbank einzuzahlende und gesuchte Summe x ist die Rate einer vorschüssigen Jahresrente, welche 20 Jahre läuft und die vereinnahmten Gelder der Bank repräsentiert.

Nach vorstehender Formel 29 erhält man für den Wert dieser von der Bank vereinnahmten Gelder bis zu Ende des 20. Jahres, wenn man in derselben:

$r = x$
$p = 3$ und
$n = 20$

setzt:

$$\frac{x \,.\, 1{,}03 \,.\, (1{,}03^{20} - 1)}{0{,}03}$$

Da das gegenseitige Rechtsverhältnis von da ab noch 4 Jahre weiter besteht, so erhält man nach vorstehender Formel 1[a] für den Wert der von der Bank vereinnahmten Gelder bis zu Ende des gegenseitigen Rechtsverhältnisses:

a). . . $\dfrac{x \,.\, 1{,}03 \,.\, (1{,}03^{20} - 1)}{0{,}03} \cdot 1{,}03^4$

Die von der Bank verausgabten Gelder bilden die Raten von je 600 Mark einer um 21 Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente, welche 4 Jahre lang zu zahlen ist. Für den Wert der von der Bank verausgabten Gelder bis zu Ende des gegenseitigen Rechtsverhältnisses, hat man sonach, wenn man in vorstehende Formel 41:

$$r = 600$$
$$p = 5 \quad \text{und}$$
$$n = 4$$

setzt:

b). . . $\dfrac{600 \,.\, 1{,}05 \,.\, (1{,}05^4 - 1)}{0{,}05}$

Da die gegenseitigen Leistungen gleich sein müssen, so besteht hiernach für x die Bestimmungsgleichung:

1). . . $\dfrac{x \,.\, 1{,}03 \,.\, (1{,}03^{20} - 1)}{0{,}03} \cdot 1{,}03^4 = \dfrac{600 \,.\, 1{,}05 \,.\, (1{,}05 \,.\, (1{,}05^4 - 1)}{0{,}05}$

Hieraus findet man x, wie folgt:

$$x = \frac{600 \,.\, 1{,}05 \,.\, (1{,}05^4 - 1) \,.\, 0{,}03}{0{,}05 \,.\, 1{,}03 \,.\, (1{,}03^{20} - 1) \,.\, 1{,}03^4}$$

$$x = \frac{600 \,.\, 1{,}05 \,.\, (1{,}05^4 - 1) \,.\, 3}{5 \,.\, 1{,}03 \,.\, (1{,}03^{20} - 1) \,.\, 1{,}03^4}$$

$$x = \frac{360 \,.\, 1{,}05 \,.\, (1{,}05^4 - 1)}{1{,}03^4 \,.\, 1{,}03 \,.\, (1{,}03^{20} - 1)}$$

$$x = \frac{360 \,.\, 1{,}05 \,.\, 0{,}21551}{1{,}03^5 \,.\, 0{,}80611} \quad \text{(siehe Hülfsr. 1 u. 2)}$$

$$\log x = \log 360 + \log 1{,}05 + \log 0{,}21551 - (5 \,.\, \log 1{,}03 + \log 0{,}80611)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 360 &= 2{,}5563025 \\ + \log 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ + \log 0{,}21551 &= 0{,}3334674 - 1 \\ \hline & 2{,}9109592 - 1 \end{aligned}$$

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}05^4 = 4 \,.\, \log 1{,}05$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ & \ .4 \\ \hline & 0{,}0847572 \\ & 7550 \\ \hline & 22 \end{aligned}$$

mithin ist:

$1{,}05^4 = 1{,}21551$

und:

$1{,}05^4 - 1 = 1{,}21551 - 1 = 0{,}21551$

2). $\log 1{,}03^{20} = 20 \,.\, \log 1{,}03$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}03 &= 0{,}0128372247 \quad \text{(s. Hülfstaf. II)} \\ & \ .20 \\ \hline & 0{,}2567444940 \\ \text{oder} &= 0{,}2567443 \\ & 7418 \\ \hline & 25 \\ & 24 \end{aligned}$$

mithin:

$1{,}03^{20} = 1{,}80611$

und:

$1{,}03^{20} - 1 = 1{,}80611 - 1 = 0{,}80611$

3). $\log 1{,}03 = 0{,}0128372$

$$\begin{aligned} & \ .5 \\ \hline & 0{,}0641860 \\ + \log 0{,}80611 &= 0{,}9063943 - 1 \\ \hline & 0{,}9705803 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{oder} = 1{,}9109592$$
$$-(5 . \log 1{,}03 + \log 0{,}80611) = +0{,}9705803 - 1 \text{ (s. Hülfsrechn. 3)}$$
$$- \qquad +$$
$$\log x = 0{,}9403789 + 1$$
$$\text{oder} = 1{,}9403789$$
$$3770$$

mithin:

$$x = 87{,}1724 \qquad \frac{19}{20}$$

Die der Rentenanstalt 20 mal zu zahlende Summe beträgt hiernach:

87 Mark 17 pf.

*). **Aufgabe 362.** Nach der Taxation Sachverständiger wird das Rathaus einer Landesgemeinde nach 20 Jahren baufällig und wird ein Neubau, welcher auf 100jährige Dauer berechnet ist, einen Kostenaufwand von 24000 Mark erfordern. Welche Summe hat die Gemeinde sofort bei einer Bank einzuzahlen, wenn diese Bank für ewige Dauer jene Baulast zu übernehmen bereit ist unter der Bedingung jedoch, dass das Grundkapital zu 5 %, die Zinseszinsen aber nur zu $2\frac{1}{2}$ % berechnet werden?

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}025^{100} = 100 . \log 1{,}025$

Nun ist:

$$\log 1{,}025 = 0{,}0107238654 \text{ (s. Hülfstaf. II)}$$
$$. 100$$
$$1{,}0723865400$$
$$\text{oder} = 1{,}0723865$$
$$3602$$
$$263$$
$$257{,}6$$
$$5{,}4$$
$$7{,}3$$

mithin:

$$1{,}025^{100} = 11{,}81372$$

und:

$$1{,}025^{100} - 1 = 11{,}81372 - 1 = 10{,}81372$$

Formel 27: $W = \frac{r . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 50: $w = \frac{100 . r}{p}$

Formel 22: $K = k\left(1 + \frac{P}{p}(1{,}0p^n - 1)\right)$

Auflösung. Um die in der Aufgabe gestellte Bedingung, dass das Grundkapital zu 5 %, die Zinseszinsen aber nur zu $2\frac{1}{2}$ % verzinst werden sollen, in Betracht ziehen zu können, berechne man zunächst den Wert der alle 100 Jahre erforderlichen Bausummen für die Zeit des 1. Neubaues (nach 20 Jahren). Dies geschieht wie folgt:

Für die alle 100 Jahre fälligen Bausummen von je 24000 Mark substituiere man bei $2\frac{1}{2}$ prozentiger Zinseszinsberechnung eine ewige Jahresrente, Entschädigungsrente genannt (da sie zur Berechnung der gesuchten Ablösungssumme dient).

Nach vorstehender Formel 27 erhält man für die Rate x der gedachten Entschädigungsrente, welche Rate auch „Reädifikationsbetrag" genannt wird, die Bestimmungsgleichung:

$$1). \ldots 24000 = \frac{x . (1{,}025^{100} - 1)}{0{,}025}$$

woraus sich:

$$x = \frac{24000 . 0{,}025}{1{,}025^{100} - 1} = \frac{600}{10{,}81372}$$

oder: (siehe Hülfsrechn. 1)

$$2). \ldots x = 55{,}4849 \text{ ergibt.}$$

Hülfsrechnungen:

2). $log \frac{600}{10,81372} = log\,600 - log\,10,81372$

$log\,600 = 2,7781513$
$-log\,10,81372 = -1,0339751$ (s. Hülfsr. 3)
$1,7441762$
1678
84
70,2

mithin:
$\frac{600}{10,81372} = 55,4849$

3). . . . $log\,10,81372 = 1,0339462$
$+\,281,4$
$+\,8,0$
$1,0339751$

4). $log\,1,025^{20} = 20\,.\,log\,1,025$
Nun ist:
$log\,1,025 = 0,0107238654$
$.\,20$
$0,2144773080$

oder $= 0,2144773$
4730
43
53

mithin:
$1,025^{20} = 1,63862$
und:
$1,025^{20} - 1 = 1,63862 - 1 = 0,63862$

5). $log\,y = log\,25109,69 - log\,2,27724$
Nun ist:
$log\,25109,69 = 4,3998294$
$+\,103,8$
$+\,15,6$
$4,3998413$
$-log\,2,27724 = -0,3574088$ (s. Hülfsr. 6)
$log\,y = 4,0424325$
4180
145
118,2
26,8
27,5

mithin:
$y = 11026,37$

6). . . . $log\,2,27724 = 0,3574012$
$+\,76$
$0,3574088$

Die alle 100 Jahre fälligen Summen von je 24000 Mark hat man hiernach durch eine nachschüssige ewige Jahresrente von 55,4849 Mark ersetzt und zwar so, dass die Zinseszinsberechnung nach $2\frac{1}{2}$prozentigem Zinsfuss stattfand.

Da nun nach der Erkl. 212 sich aus der vorstehenden Formel 50:

$$w = \frac{100\,.\,r}{p}$$

ergibt, dass der bare Wert w einer ewigen Jahresrente ein Kapital ist, dessen jährliche Zinsen gleich der Rate r einer ewigen Rente sind, so erhält man nach dieser Formel, wenn man in derselben:

für r den sogen. Reädifikationsbetrag von 55,4849 und
„ $p = 5$ setzt,

den baren Wert jener Entschädigungsrente, bezw. den Wert der alle 100 Jahre fälligen Bausummen von je 24000 Mark für die Zeit des 1. Neubaues, mit:

3). . . $w = \frac{100\,.\,55,4849}{5}$

oder:

4). . . $w = 1109,69$

Da nach 20 Jahren die Summe von 24000 Mark für den ersten Neubau erforderlich ist und zu dieser Zeit die Abfindungssumme für alle übrigen, alle 100 Jahre erforderlichen Neubauten 1109,69 Mark beträgt, so wäre zu jener Zeit die Abfindungssumme =
24000 + 1109,69 Mark.

Für den gesuchten Jetztwert y dieser Abfindungssumme erhält man nach vorstehender Formel 22, wenn man in derselben:

$k = y$
$K = 24000 + 1109,69$
$P = 5$
$p = 2\frac{1}{2} = 2,5$ und
$n = 20$ setzt,

die Bestimmungsgleichung:

5). . . $24000 + 1109,69 = y\left(1 + \frac{5}{2\frac{1}{2}}(1,025^{20} - 1)\right)$

Hieraus findet man y, wie folgt:

$25109,69 = y\,(1 + 2\,.\,(1,025^{20} - 1))$

$25109,69 = y\,(1 + 2\,.\,0,63862)$ (siehe Hülfsr. 4)

$$25109{,}69 = y\,(1 + 1{,}27724)$$

$$25109{,}69 = y\,.\,2{,}27724$$

$$y = \frac{25109{,}69}{2{,}27724}$$

oder nach Hülfsrechnung 5:

$$y = 11026{,}37$$

Die Gemeinde hat hiernach:

11026 Mark 37 pf. als Abfindungssumme bei der Bank einzuzahlen.

*). **Aufgabe 363.** Die Dauer eines Gebäudes wird auf 200 Jahre taxiert, der nach dieser Zeit erforderliche Neubau bedingt einen Kostenaufwand von 10500 Mark und wird dessen weitere Dauer auf 150 Jahre veranschlagt. Wie gross ist der Kapitalanschlag der Baulast, wenn die nach je 150 Jahren erforderlichen Neubauten stets jene Bausumme beanspruchen sollen und wenn der Berechnung im allgemeinen 5 % zu Grunde gelegt wird, die Zinseszinsen aber nur zu $2\frac{1}{2}$ % berechnet werden sollen?

Formel 27: $W = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Formel 50: $w = \frac{100\,.\,r}{p}$

Formel 22: $K = k\left(1 + \frac{P}{p}(1{,}0p^n - 1)\right)$

Auflösung. Zunächst berechne man, analog der vorhergehenden Aufgabe, die Rate x der sogenannten Entschädigungsrente, deren Endwert bei Zugrundelegung der Zinseszinsberechnung zu $2\frac{1}{2}$ % nach einem Zeitraum von 150 Jahren gleich dem Betrage von 10500 Mark ist, welchen ein Neubau erfordert.

Nach vorstehender Formel 27 erhält man für die gesuchte Rate x, bezw. für den sog. Reädifikationsbetrag:

$$10500 = \frac{x\,.\,(1{,}02^{150} - 1)}{0{,}02}$$

oder:

$$x = \frac{10500\,.\,0{,}025}{1{,}02^{150} - 1} = \frac{262{,}5}{39{,}60503}$$

(siehe Hülfsrechn. 1)

2). . . $x = 6{,}629$

Die alle 150 Jahre fälligen Summen von je 10500 Mark hat man somit durch eine nachschüssige ewige Jahresrente von 6,629 Mark ersetzt und zwar so, dass die Zinseszinsen jener Summen zu $2\frac{1}{2}$ % berechnet sind.

Mittels vorstehender Formel 50, erhält man wie in voriger Aufgabe, wenn:

r = dem Reädifikationsbetrag von 6,629 und

$p = 5$

gesetzt wird, für den baren Wert w der

nachschüssigen ewigen Jahresrente, bezw. für den Wert der alle 150 Jahre erforderlichen Bausumme von 10 500 Mark für die Zeit des ersten Neubaues nach 200 Jahren:

3). . . . $w = \frac{100 \,.\, 6{,}629}{5}$

oder:

4). . . . $w = 132{,}580$

Da nach 200 Jahren zum erstenmal die Summe von 10 500 Mark für einen Neubau erforderlich ist und bis zu dieser Zeit 50 + 150 Jahre verstreichen, so ist die Abfindungssumme nach 50 Jahren für alle folgenden erforderlichen Neubauten auch = 132,58 Mark und man erhält für den gesuchten Jetztwert y dieser Abfindungssumme, nach vorstehender Formel 22:

$$132{,}58 = y\left(1 + \frac{5}{2\frac{1}{2}}(1{,}025^{50} - 1)\right)$$

Hieraus findet man y, wie folgt:

$132{,}58 = y\,(1 + 2 \,.\, 2{,}43711)$ (s. Hülfsrechn. 2)

$132{,}58 = y\,(1 + 4{,}87422)$

$132{,}58 = y \,.\, 5{,}87422$

$y = \frac{132{,}58}{5{,}87422}$

oder: $y = 22{,}56$

Die Ablösungssumme, auch Kapitalanschlag der Baulast genannt, beträgt hiernach: 22 Mark 56 pf.

Hülfsrechnungen:

1). $log\, 1{,}025^{150} = 150 \,.\, log\, 1{,}025$

Nun ist:

$log\, 1{,}025 = 0{,}0107238654$ (s. Hülfs-taf. II)

$. \, 150$

5361932700

107238654

1,6085798100

oder = 1,6085798

5795

3

3,2

mithin:

$1{,}025^{150} = 40{,}60503$

und:

$1{,}025^{150} - 1 = 40{,}60503 - 1 = 39{,}60503$

2). $log\, 1{,}025^{50} = 50 \,.\, log\, 1{,}025$

Nun ist:

$log\, 1{,}025 = 0{,}0107238654$

$. \, 50$

0,5361932700

oder = 0,5361933

1922

11

12,6

mithin:

$1{,}025^{50} = 3{,}43711$

und:

$1{,}025^{50} - 1 = 3{,}43711 - 1 = 2{,}43711$

*). **Aufgabe 364.** Jemand hat eine nachschüssige Jahresrente, deren aufeinanderfolgende Raten nach der geometrischen Reihe:

$$r,\ rq,\ rq^2,\ \ldots\ rq^{n-1}$$

stetig wachsen, zu beziehen. Welches ist der bare und der Endwert dieser Rente, wenn der Zinsfuss p % beträgt und die Rente n Jahre lang beziehbar ist?

Formel 26: $W = w \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Der bare Wert der 1., am Ende des 1. Jahres fälligen Rate r ist nach vorstehender Formel 26 und der Erkl. 167 $= \frac{r}{1{,}0p}$; der bare Wert der 2., am Ende des 2. Jahres fälligen Rate rq ist nach vorstehender Formel 26 und der Erkl. 167 $= \frac{rq}{1{,}0p^2}$; der bare Wert der 3., am Ende des 3. Jahres fälligen Rate rq^2 ist $= \frac{rq^2}{1{,}0p^3}$

Aus der Analogie dieser gefundenen Barwerte ergibt sich, dass der bare Wert der 4. Rate $rq^3 = \frac{rq^3}{1{,}0p^4}$ u.s.f., schliesslich der bare Wert der letzten, der n^{ten} Rate $r \cdot q^{n-1} = \frac{rq^{n-1}}{1{,}0p^n}$ ist.

Für den gesuchten Barwert w der ganzen Rente besteht somit die Gleichung:

1). . . $w = \frac{r}{1{,}0p} + \frac{rq}{1{,}0p^2} + \frac{rq^2}{1{,}0p^3} + \frac{rq^3}{1{,}0p^4} + \cdots \frac{rq^{n-1}}{1{,}0p^n}$

Da nun die Glieder rechts dieser Gleichung in ihrer Aufeianderfolge eine geometrische Reihe bilden (siehe Kleyers Lehrb. der arithm. und geometr. Progressionen),

deren erstes Glied $a = \frac{r}{1{,}0p}$

deren Quotient $q = \frac{q}{1{,}0p}$ und

deren letztes Glied $t = \frac{rq^{n-1}}{1{,}0p^n}$ ist,

so erhält man nach der Summenformel:

$s = \frac{tq - a}{q - 1}$ (siehe Kleyers Lehrbuch der arithm. und geometr. Reihen)

für den gesuchten Barwert w:

$$w = \frac{\frac{rq^{n-1}}{1{,}0p^n} \cdot \frac{q}{1{,}0p} - \frac{r}{1{,}0p}}{\frac{q}{1{,}0p} - 1}$$

oder:

$$w = \frac{r \cdot q^n - r \cdot 1{,}0p^n}{1{,}0p^{n+1}} : \frac{q - 1{,}0p}{1{,}0p} = \frac{r \cdot (q^n - 1{,}0p^n) \cdot 1{,}0p}{(q - 1{,}0p) \cdot 1{,}0p^{n+1}}$$

mithin:

A). . . $w = \frac{r(q^n - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n(q - 1{,}0p)}$ (s. Erkl. 228)

Zur Berechnung des gesuchten Endwerts W der fraglichen Rente erhält man nach der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26:

$$W = w \cdot 1{,}0p^n$$

unter Benutzung der vorstehend entwickelten Gleichung A). die Beziehung:

Erkl. 228. Nebenstehende Gleichung A)., durch welche die Beziehung ausgedrückt ist, in welcher der Barwert w und die Bestimmungsstücke einer nachschüssigen Rente stehen, deren Raten nach der geometrischen Reihe:

$$r_1,\ rq,\ rq^2,\ \ldots\ldots rq^{n-1}$$

stetig wachsen, und welche n Jahre lang läuft, kann man sich als:

Formel 64: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n \cdot (q - 1{,}0p)}$

besonders merken.

Ebenso kann man sich die umstehende Gleichung B)., durch welche die Beziehung zwischen dem Endwert W und den übrigen Bestimmungsstücken einer solchen Rente ausgedrückt ist, als:

Formel 65: $W = \frac{r \cdot (q^n - 1{,}0p^n)}{q - 1{,}0p}$

besonders merken.

Aehnliche Formeln für derartige vorschüssige, aufgeschobene etc. Renten kann man in analoger Weise herleiten.

$$W = \frac{r(q^n - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n(q - 1{,}0p)} \cdot 1{,}0p^n$$

oder:

B). . $$W = \frac{r(q^n - 1{,}0p^n)}{q - 1{,}0p}$$

*). **Aufgabe 365.** Jemand hat eine nachschüssige Jahresrente, deren aufeinanderfolgende Raten nach der arithmetischen Reihe:

$r,\ (r+d),\ (r+2d), \ldots (r+(n-1)d)$

stetig wachsen, zu beziehen. Welches ist der bare und der Endwert dieser Rente, wenn der Zinsfuss p % beträgt und die Rente n Jahre lang zahlbar ist?

Erkl. 229. Eine „zusammengesetzte Reihe" nennt man eine solche, welche durch gliedweise Multiplikation einer arithmetischen und einer geometrischen Progression entstanden gedacht werden kann.

Hat man hiernach z. B. die arithmetische Progression:

$r,\ r+d,\ r+2d,\ r+3d, \ldots r+(n-1)d$

und die geometrische Progression:

$$\frac{1}{1{,}0p},\ \frac{1}{1{,}0p^2},\ \frac{1}{1{,}0p^3},\ \frac{1}{1{,}0p^4} \ldots \frac{1}{1{,}0p^n}$$

und man multipliziert die entsprechenden Glieder beider Reihen miteinander, so erhält man die zusammengesetzte Reihe:

$$\frac{r}{1{,}0p},\ \frac{r+d}{1{,}0p^2},\ \frac{r+2d}{1{,}0p^3},\ \frac{r+3d}{1{,}0p^4}, \ldots \frac{r+(n-1)d}{1{,}0p^n}$$

deren Summe die rechte Seite der nebenstehend entwickelten Gleichung 1). bildet.

Siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Erkl. 230. Zwischen dem summatorischen Gliede S einer zusammengesetzten Reihe, und den Bestimmungsstücken A, a, q, d und n der geometrischen und arithmetischen Reihe, aus welchen jene zusammengesetzte Reihe (siehe Erkl. 229) gebildet ist, nämlich zwischen dem Anfangsglied A, dem Quotient q und der Anzahl n der Glieder der gedachten geometrischen Reihe, und dem Anfangsglied a, der Differenz d und der Anzahl n der Glieder der gedachten arithmetischen Reihe, besteht die Relation:

1). $$S = Aa \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + \frac{Ad}{q-1}\left[q^n(n-1) - q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1}\right]$$

Siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Formel 26: $W = w \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. Der bare Wert der 1., am Ende des 1. Jahres fälligen Rate r ist nach vorstehender Formel 26 und der Erkl. 167 $= \frac{r}{1{,}0p}$; der bare Wert der 2., am Ende des 2. Jahres fälligen Rate $(r+d)$ ist nach vorstehender Formel 26 und der Erkl. 167 $= \frac{r+d}{1{,}0p^2}$; der bare Wert der 3., am Ende des 3. Jahres fälligen Rate $(r+2d)$ ist $= \frac{r+2d}{1{,}0p^3}$

Aus der Analogie dieser gefundenen Barwerte ergibt sich, dass der bare Wert der 4. Rate $(r+3d) = \frac{r+3d}{1{,}0p^4}$ u. s. f., schliesslich der bare Werte der letzten, der n^{ten} Rate $(r+(n-1)d) = \frac{r+(n-1)d}{1{,}0p^n}$ ist.

Für den gesuchten Barwert w der ganzen Rente besteht somit die Gleichung:

1). $$w = \frac{r}{1{,}0p} + \frac{r+d}{1{,}0p^2} + \frac{r+2d}{1{,}0p^3} + \frac{r+3d}{1{,}0p^4} + \ldots \ldots + \frac{r+(n-1)d}{1{,}0p^n}$$

Betrachtet man die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, so findet man, dass dieselben in ihrer Aufeinanderfolge nach der Erkl. 229 eine zusammengesetzte Reihe bilden, welche durch gliedweise Multiplikation der arithmetischen Reihe:

a). $r,\ r+d,\ r+2d,\ r+3d, \ldots r+(n-1)d$

und der geometrischen Reihe:

b). $$\frac{1}{1{,}0p},\ \frac{1}{1{,}0p^2},\ \frac{1}{1{,}0p^3},\ \frac{1}{1{,}0p^4}, \ldots \frac{1}{1{,}0p^n}$$

entstanden gedacht werden kann.

Erkl. 231. Umstehende Gleichung A)., durch welche die Beziehung ausgedrückt ist, in welcher der Barwert w und die Bestimmungsstücke einer nachschüssigen Rente stehen, deren Raten nach der arithmetischen Progression:

$$r,\ (r+d),\ (r+2d),\ \ldots\ r+(n-1)d$$

stetig wachsen, und welche n Jahre lang läuft, kann man sich als

Formel 66:

$$w = \frac{1}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \cdot \left[r(1{,}0p^n - 1) - d(n-1) + \frac{d \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p} \right]$$

besonders merken.

Ebenso kann sich die umstehende Gleichung B), durch welche die Beziehung zwischen dem Endwert W und den übrigen Bestimmungsstücken einer solchen Rente ausgedrückt ist, als

Formel 67:

$$W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} - \frac{d(n-1)}{0{,}0p} + \frac{d \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p^2}$$

besonders merken.

Aehnliche Formeln für derartige vorschüssige, aufgeschobene etc. Renten kann man in analoger Weise herleiten.

Setzt man zur Bildung der gesuchten Summe w jener zusammengesetzten Reihe in der in der Erkl. 230 erwähnten Summenformel:

für $S = w$

" das Anfangsglied A der unter b) angeführten geometrischen Reihe $= \frac{1}{1{,}0p}$

" den Quotienten q derselben $= \frac{1}{1{,}0p}$

" die Zahl n der Glieder derselben $= n$

" das Anfangsglied a der unter a). angeführten arithmetischen Reihe $= r$

" die Differenz d derselben $= d$ und

" die Anzahl n der Glieder derselben ebenfalls $= n$,

so erhält man für die Summe w jener zusammengesetzten Reihe:

$$2).\quad w = \frac{1}{1{,}0p} \cdot r \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}0p}\right)^n - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1} + \frac{\frac{1}{1{,}0p} \cdot d}{\frac{1}{1{,}0p} - 1} \cdot \left[\left(\frac{1}{1{,}0p}\right)^n \cdot (n-1) - \frac{1}{1{,}0p} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}0p}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{1{,}0p} - 1} \right]$$

Diese Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

$$w = \frac{r}{1{,}0p} \cdot \frac{\frac{1 - 1{,}0p^n}{1{,}0p^n}}{\frac{1 - 1{,}0p}{1{,}0p}} + \frac{\frac{d}{1{,}0p}}{\frac{1 - 1{,}0p}{1{,}0p}} \cdot \left[\frac{1}{1{,}0p^n}(n-1) - \frac{1}{1{,}0p} \cdot \frac{\frac{1 - 1{,}0p^{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}}{\frac{1 - 1{,}0p}{1{,}0p}} \right]$$

$$w = \frac{r}{1{,}0p} \cdot \frac{(1 - 1{,}0p^n) \cdot 1{,}0p}{(1 - 1{,}0p) \cdot 1{,}0p^n} + \frac{d \cdot 1{,}0p}{(1 - 1{,}0p) \cdot 1{,}0p} \cdot \left(\frac{n-1}{1{,}0p^n} - \frac{1}{1{,}0p} \cdot \frac{(1 - 1{,}0p^{n-1}) \cdot 1{,}0p}{(1 - 1{,}0p) \cdot 1{,}0p^{n-1}} \right)$$

$$w = \frac{r}{1{,}0p^n} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^n}{1 - 1{,}0p} + \frac{d}{1 - 1{,}0p} \cdot \left(\frac{n-1}{1{,}0p^n} - \frac{1 - 1{,}0p^{n-1}}{1{,}0p^{n-1}(1 - 1{,}0p)} \right)$$

$$w = \frac{r \cdot (1 - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n \cdot (1 - 1{,}0p)} + \frac{d}{1{,}0p^n (1 - 1{,}0p)} \cdot \left(n - 1 - \frac{(1 - 1{,}0p^{n-1}) \cdot 1{,}0p}{1 - 1{,}0p} \right)$$

Wird jeder Quotient der rechten Seite dieser Gleichung mit -1 multipliziert und dividiert, so erhält man:

$$w = \frac{r \cdot (-1 + 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n \cdot (-1 + 1{,}0p)} + \frac{-d}{1{,}0p^n \cdot (-1 + 1{,}0p)} \cdot \left(n - 1 - \frac{(-1 + 1{,}0p^{n-1}) \cdot 1{,}0p}{-1 + 1{,}0p} \right)$$

oder:

$$w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} - \frac{d}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \cdot \left(n - 1 - \frac{(1{,}0p^{n-1} - 1) \cdot 1{,}0p}{0{,}0p}\right)$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots w = \frac{1}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \cdot \left(r \cdot (1{,}0p^n - 1) - d\,(n-1) + \frac{d \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p}\right)$$

(siehe Erklärung 231)

Zur Berechnung des gesuchten Endwertes W der fragl. Rente erhält man nach der in der Erkl. 176 aufgestellten Formel 26:

$$W = w \cdot 1{,}0p^n$$

unter Benützung der vorstehend entwickelten Gleichung A)., die Beziehung:

$$W = \frac{1}{0{,}0p} \cdot \left(r \cdot (1{,}0p^n - 1) - d\,(n-1) + \frac{d \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p}\right)$$

oder:

$$\text{B)} \ldots W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} - \frac{d\,(n-1)}{0{,}0p} + \frac{d \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p^2}$$

Aufgabe 366. Jemand hat 10000 Mark eingezahlt und bezieht dafür 20 Jahre lang am Ende jeden Jahres eine Rente, welche sich jedes Jahr um 25 % der Rente des 1. Jahres vergrössert. Welche Rente ist nach dem 1. Jahre zu zahlen, wenn 4 % Zinsen gerechnet werden?

Erkl. 232. Hat man irgend eine Grösse z. B. die Grösse x, so sind 25 % derselben $= \frac{1}{4}x$; denn 25 % von einer Grösse x nehmen, heisst:

von 100 Teilen derselben soll man 25 Teile

also von 1 Teile derselben $\frac{25}{100}$ und

von x „ „ $\frac{25}{100} \cdot x$ oder $= \frac{1}{4}x$

nehmen.

Formel 66:

$$w = \frac{1}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \cdot \left[r\,(1{,}0p^n - 1) - d\,(n-1) + \frac{d \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p}\right]$$

Auflösung. Die in der Aufgabe erwähnte Rente ist, da die Raten derselben jedes Jahr um dasselbe, nämlich um 25 % der ersten Rate wachsen, eine solche Rente, deren Raten in *arithmetischer Progression* zunehmen; denn bezeichnet man die erste Rate, welche gesucht ist mit x, so ist der Aufgabe gemäss und nach der Erkl. 232 die 2. Rate $= x + \frac{1}{4}x$, hiernach die 3. Rate $= x + 2 \cdot \frac{1}{4}x$, die 4. Rate $= x + 3 \cdot \frac{1}{4}x$ u. s. f., d. h. die aufeinanderfolgenden Raten bilden die arithmetische Reihe:

$$\text{a)} \ldots x,\ (x + \tfrac{1}{4}x),\ (x + 2 \cdot \tfrac{1}{4}x),\ (x + 3 \cdot \tfrac{1}{4}x), \ldots$$

Mit Benutzung der vorstehenden Formel 66 erhält man hiernach, wenn man in derselben:

$$w = 10000$$
$$p = 4$$
$$n = 20$$

Hülfsrechnungen:

1). $\log 1{,}04^{20} = 20 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333393 \quad \text{(s. Hülfs-taf. II)} \\ & .\,20 \\ \hline & 0{,}3406667860 \\ \text{oder} = & 0{,}3406668 \end{array}$$

6622
46
39,6

mithin:

$1{,}04^{20} = 2{,}19112$

und:

$1{,}04^{20} - 1 = 2{,}19112 - 1 = 1{,}19112$

2). $\log 1{,}04^{19} = 19 \,.\, \log 1{,}04$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333393 \\ & .\,19 \\ \hline & 1533000537 \\ & 170333393 \\ \hline & 0{,}3236334467 \\ \text{oder} = & 0{,}3236334 \end{array}$$

6233
101
103

mithin:

$1{,}04^{19} = 2{,}10685$

und:

$1{,}04^{19} - 1 = 2{,}10685 - 1 = 1{,}10685$

3). $\log \dfrac{104 \,.\, 1{,}10685}{16} = \log 1{,}04 + \log 1{,}10685 - \log 16$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333 \\ + \log 1{,}10685 = & 0{,}0440692 \\ & +196 \\ \hline & (+1) \quad (-1) \\ & 0{,}0611221 \\ - \log 16 = & -1{,}2041200 \\ \hline & 0{,}8570021 - 1 \end{array}$$

0006
15
12,2

mithin:

$\dfrac{104 \,.\, 1{,}10685}{16} = 7{,}19452$

4). . . . $\log 3{,}63564 = 0{,}5605761$

$$\begin{array}{r} 0{,}5605761 \\ +47{,}6 \\ \hline 0{,}5605809 \end{array}$$

$d = \frac{1}{4} x$, d. i. die Differenz der unter a). aufgestellten arithmetischen Reihe,

und

$r = x$ setzt,

für x die Bestimmungsgleichung:

$$1)\ldots\; 10000 = \frac{1}{1{,}04^{20} \,.\, 0{,}04} \cdot \left[x \cdot 1{,}04^{20} - 1) - \frac{1}{4} x \cdot (20 - 1) + \frac{\frac{1}{4} x \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^{20-1} - 1)}{0{,}04} \right]$$

Hieraus findet man x wie folgt:

$$10000 = \frac{25}{1{,}04^{20}} \cdot \left[x \cdot (1{,}04^{20} - 1) - \frac{1}{4} x \,.\, 19 + \frac{x \,.\, 104 \,.\, (1{,}04^{19} - 1)}{16} \right]$$

$$\frac{10000 \,.\, 1{,}04^{20}}{25} = x \,.\, 1{,}19112 - \frac{19}{4} x + \frac{x \,.\, 104 \,.\, 1{,}10685}{16} \quad \text{(s. Hülfsr. 1 u. 2)}$$

$$400 \,.\, 1{,}04^{20} = 1{,}19112\, x - 4{,}75\, x + 7{,}19452\, x$$

(siehe Hülfsrechn. 3)

$$3{,}63564 \,.\, x = 400 \,.\, 1{,}04^{20}$$

$$x = \frac{400 \,.\, 1{,}04^{20}}{3{,}63564}$$

$$\log x = \log 400 + 20 \,.\, \log 1{,}04 - \log 3{,}63564$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 400 = & 2{,}6020600 \\ + 20 \,.\, \log 1{,}04 = & 0{,}3406668 \quad \text{(s. Hülfsr. 1)} \\ \hline & 2{,}9427268 \\ - \log 3{,}63564 = & -0{,}5605809 \quad (\text{„} \quad \text{„} \quad 4) \\ \hline \log x = & 2{,}3821459 \end{array}$$

1432
27
36

mithin:

$x = 241{,}072$

Die 1. Rate der Rente beträgt hiernach $= 241$ Mark und 7 pf.

2). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 367. Wie gross ist der bare Wert einer 10 Jahre hindurch, am Ende eines jeden Jahres zu beziehenden Rente, deren Raten je 1500 ℳ betragen, wenn der Berechnung 4 % Zinseszinsen zu Grunde gelegt werden?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 323.

Aufgabe 368. Eine nachschussweise Jahresrente von 500 ℳ, welche 15 Jahre lang zahlbar ist, soll verkauft werden; wieviel wird man dafür erhalten, wenn man $3^1/_2$ % Zinseszinsen der Berechnung zu Grunde legt?

Aufgabe 369. Jemand will einem Verwandten auf 10 Jahre eine Rente von 20000 ℳ zuwenden. Welche Mise hat er zu zahlen, wenn der Zinsfuss zu $3^1/_4$ % angenommen wird?

Aufgabe 370. Jemand will eine 15jährige Rente von 1200 ℳ kapitalisieren, bezw. verkaufen oder ablösen; wie hoch beläuft sich die Verkaufssumme, wenn die Zinseszinsen zu $4^1/_4$ % berechnet werden?

Aufgabe 371. Jemand hat eine Jahresrente (Annuität) von 900 ℳ 15 Jahre zu geniessen. Wieviel ist für dieselbe jetzt zu bezahlen, wenn die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet werden?

Aufgabe 372. Jemand, der eine Jahresrente von 2500 ℳ auf 10 Jahre zu geniessen hat, will solche verkaufen; wieviel kann man ihm für diese Rente an barem Gelde geben, wenn die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet werden?

Aufgabe 373. Jemand hat 20 Jahre lang ein jährliches Einkommen von 300 ℳ zu beziehen. Da er aber ein Geschäft anfangen will, so entschliesst er sich, seine 20jährige Rente zu verkaufen. Wieviel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, wenn die Zinsen $3^3/_4$ % betragen?

Aufgabe 374. Jemand will von seinem Grundstück eine Rente ablösen, die jährlich 560 ℳ beträgt und noch 35 Jahre auf demselben lastet. Welche Ablösungssumme muss er entrichten, wenn der Zinsfuss = $3^1/_2$ % beträgt?

Aufgabe 375. Wie gross sind die Raten derjenigen nachschüssigen Rente, welche 20 Jahre zu beziehen ist und deren barer Wert = 25000 ℳ beträgt, zu $3^1/_2$ % gerechnet?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 324.

Aufgabe 376. Jemand zahlt an einen Entrepreneur eine Mise im Betrage von 15000 ℳ und wünscht dafür 10 Jahre lang eine Rente zu beziehen. Wie gross ist die Rente, bezw. die Rate derselben, die der Entrepreneur dem Rentner geben kann, wenn $4^1/_4$ % gerechnet werden?

Aufgabe 377. Jemand wünscht nach seinem Tode seinen zurückbleibenden Angehörigen 5000 ℳ zu hinterlassen und will zu dem Zwecke an eine öffentliche Lebensversicherungsanstalt jährlich postnumerando eine gewisse Summe zahlen. Welche Summe hat diese Anstalt zu fordern, wenn sie gemäss den Sterblichkeitsregistern als wahrscheinliche Lebensdauer des Versichernden 18 Jahre annimmt und wenn der Zinsfuss $3^3/_4\,\%$ beträgt?

Andeutung. Man hat die Rate x einer nachschüssigen Jahresrente zu bestimmen, deren Endwert = 5000 Mark beträgt und welche 18 Jahre lang läuft, die Zinsen zu $3^3/_4\,\%$ gerechnet (siehe Erkl. 178).

Aufgabe 378. Wie gross muss eine Jahresrente sein, wenn der Genuss derselben auf 15 Jahre einem baren Kapital von 35000 ℳ gleichgeachtet werden soll, die Zinsen zu $3^1/_2\,\%$ gerechnet?

Aufgabe 379. Eine Mutter will sich bei ihren Kindern auf Leibrente geben. Sie zahlt zu dem Zwecke 6000 ℳ Wie hoch rechnet sie ihren Lebensunterhalt jährlich, wenn sie noch 18 Jahre zu leben gedenkt, die Zinsen zu 4 % gerechnet?

Andeutung. Siehe Erkl. 178.

Aufgabe 380. Jemand will sein Leben in der Weise versichern, dass seine Erben nach seinem Tode 20000 ℳ erhalten. Wieviel muss er am Ende eines jeden Jahres zahlen, wenn er nach den Sterblichkeitstabellen noch 17 Jahre zu leben hat, die Zinsen zu $3^3/_4\,\%$ gerechnet?

Andeutung. Siehe Erkl. 178.

Aufgabe 381. A hinterlegt bei B eine Mise von 10000 ℳ und verlangt dafür einen Rentenbezug im Betrage von 955 ℳ 82 ₰ zu beziehen. Wieviele Jahre konnte ihm bei 5 % Zinsberechnung diese Rente ausbezahlt werden?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 325.

Aufgabe 382. A hinterlegt auf einer Bank bar 20000 ℳ und bezog dafür am Ende eines jeden Jahres 1000 ℳ Wie lange blieb A im Genusse dieser Rente, wenn $3^1/_2\,\%$ Zins zu Grunde gelegt wird?

Aufgabe 383. Auf wieviel Jahre ist eine Jahresrente r zu geniessen, deren Wert der zu $p\,\%$ verzinsten baren Summe b gleichkommt?

Aufgabe 384. Wieviel Jahre hindurch kann jemand eine nachschüssige Jahresrente geniessen, deren Raten je 1150 ℳ betragen, wenn er bar 12000 ℳ zahlt und wenn die Zinsen zu $3^1/_2\,\%$ berechnet werden?

Aufgabe 385. Jemand will für 34580 ℳ eine Jahresrente von 2000 ℳ erwerben; auf wie lange kann man ihm diese Rente bewilligen, wenn die Zinsen zu 4 % gerechnet werden?

Aufgabe 386. Wieviel Jahre hat eine Jahresrente von 1500 ℳ zu laufen, die einen Wert von 30000 ℳ hat, die Zinsen zu $3^3/_4\,\%$ gerechnet?

Aufgabe 387. Wie lange kann man eine Jahresrente von 4500 ℳ geniessen, wenn man zu diesem Zweck ein Kapital von 50000 ℳ zu $3^1/_3$ % auf Zinseszinsen gegeben hat?

Aufgabe 388. Jemand bietet sein Haus, welches 60000 ℳ wert ist, für eine jährliche Rente von 3000 ℳ an; wie lange kann man dieselbe bezahlen, wenn man $4^1/_4$ % Zinsen rechnet?

Aufgabe 389. Jemand ist infolge eines Legats zum Bezug einer Rente von 2500 ℳ auf 15 Jahre berechtigt. Welche Summe kann er für diese Rente

a). ein Jahr vor dem ersten Rentenbezug beanspruchen, und

b). welche Summe kann er am Tage der Verfallzeit des letzten Rentenbezugs beanspruchen, wenn er die Rente nicht bezogen hat,

wenn in beiden Fällen der Zinsfuss zu $4^1/_2$ % angenommen wird?

Andeutung. Analog den gelösten Aufgaben 325 u. 327.

Aufgabe 390. Jemand wünscht 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von 650 ℳ zu beziehen. Welche Summe hätte er am Ende des 15. Jahres zu entrichten, wenn der übliche Zinsfuss $3^3/_4$ % beträgt?

Aufgabe 391. Wie gross ist der Wert einer jährlich zu Anfang eines Jahres beziehbaren Rente, deren Raten je 650 ℳ betragen, am Ende des 15. Jahres, wenn der Zinsfuss = $3^1/_2$ % angenommen wird?

Andeutung. Zu lösen mittels Anwendung der Formel 29.

Aufgabe 392. Wie gross ist der Wert einer vorschüssigen Jahresrente von 1000 ℳ am Ende des 14. Jahres, wenn dieselbe 14 Jahre zu beziehen ist, aber nicht bezogen und zu $3^1/_2$ % kapitalisiert wurde?

Aufgabe 393. Jemand hat eine Jahresrente von 30000 ℳ während 12 Jahren zu beziehen, welche aber nach 8 Jahren zum erstenmal zu zahlen ist. Welches ist der bare Wert derselben, wenn bei Berechnung desselben 3 % Zinsen zu Grunde gelegt werden?

Andeutung. Zu lösen mittels Anwendung der Formel 40 oder der Formel 38.

Aufgabe 394. Was ist der gegenwärtige Wert einer am Ende eines jeden Jahres fälligen Rente, deren Raten je 2400 ℳ betragen, wenn die Rente 16 Jahre lang läuft, aber am Ende des 5. Jahres zum erstenmal entrichtet wird?

Aufgabe 395. Jemand will bei einer Rentenanstalt, welche 4 % Zinsen rechnet, eine jährliche Rente von 3200 ℳ auf 20 Jahre beziehen. Welchen Betrag hat er sofort zu entrichten, wenn die erste Rente nach 8 Jahren fällig sein soll?

Aufgabe 396. Eine Gemeinde hat jährlich einen Zehnten im Betrage von 92 ℳ zu entrichten, mit welchem Kapital kann sie denselben ablösen, wenn der Zins zu $4^1/_2$ % berechnet wird?

Andeutung. Zu lösen mittels Anwendung der Formel 50.

Aufgabe 397. Ein Grundbesitzer hat an die Pfarrei infolge eines alten Herkommens jährlich 40 Schafkäse, 360 Eier und 25 Schinken zu liefern. Er will diese Last, die auf jährlich 65 ℳ veranschlagt wird, ablösen. Wieviel muss er dafür der Pfarrei zahlen, die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet?

Aufgabe 398. Mit welcher Barsumme kann eine Gemeinde einen jährlich zu entrichtenden Zehnten im Betrage von 172 ℳ ablösen, wenn der Zinsfuss zu $3^1/_2$ % gerechnet wird?

Aufgabe 399. Welches ist die Barsumme, mit der die auf einem Grundstück ruhende Verpflichtung, nach je 10 Jahren 1800 ℳ zum Zweck der Unterhaltung eines auf diesem Grundstück stehenden Gebäudes zu entrichten, abgelöst werden kann, wenn der übliche Zinsfuss = $3^1/_2$ % beträgt?

Andeutung. Zu lösen mittels Anwendung der Formel 54.

Aufgabe 400. Auf einem Grundstück ruht die Verpflichtung, um ein Gebäude zu erhalten, nach je 8 Jahren 900 ℳ zu entrichten. Wie gross ist die Abfindungssumme bei einer Zinsberechnung von $3^3/_4$ %?

Aufgabe 401. Welches Ablösungskapital hat man für eine ewige Jahresrente von 200 ℳ bar zu zahlen, wenn die erste Rate erst nach 15 Jahren zu geschehen hat und der Zinsfuss = $3^1/_2$ % beträgt?

Andeutung. Zu lösen mittels Anwendung der Formel 56.

Aufgabe 402. Eine Landesgemeinde hat zum Zweck einer Melioration nach 3 Jahren zum erstenmal und in der Folge nach je weiteren 5 Jahren 300 ℳ zu entrichten. Mit welcher Barsumme kann diese Verpflichtung abgelöst werden, wenn der Zinsfuss zu $4^1/_2$ % angenommen wird?

Andeutung. Zu lösen mittels Anwendung der Formel 60 oder der Formel 61.

Aufgabe 403. Eine Gemeinde ist verpflichtet, nach 6 Jahren zum erstenmal und in der Folge nach je 5 Jahren 232 ℳ zu entrichten. Mit welcher Summe kann diese Schuld bar abgetragen werden, wenn $4^1/_2$ % Zins in Anrechnung kommt?

Aufgabe 404. Jemand zahlt einer Rentenbank k ℳ zu Anfang eines jeden Jahres durch n Jahre hindurch und will dann nach weiteren n_1 Jahren eine vorschussweise, n_2 Jahre hindurch dauernde Rente von r ℳ beziehen; welche Beziehung besteht zwischen den Grössen k, n, n_1, n_2 und r, wenn p % Zinseszinsen gerechnet werden?

Andeutung. Der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung besteht darin, dass der Barwert einer vorschüssigen Jahresrente = dem Barwert einer andern aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente ist.

Aufgabe 405. Ein junger strebsamer Mensch von 18 Jahren will sich durch jährliche vorschüssige Einzahlungen bis zu seinem 30. Jahre, also während 12 Jahren, eine von seinem 55. Lebensjahr beginnende vorschüssige Rente von 1200 ℳ bis zu seinem 70. Jahr, also auf 15 Jahre sichern. Wieviel muss eine jährliche Einzahlung betragen, wenn die betreffende Lebensversicherungsgesellschaft bei eingehenden Geldern $3\frac{1}{2}\%$, bei auszuzahlenden Geldern aber 4% Zinsen berechnet?

Andeutung. Analog der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 406. Jemand ist im Besitze einer Rente von 1600 ℳ, zahlbar während 25 Jahren und zwar jedesmal zu Anfang eines Jahres. Gleich nach dem Bezug der fünften Rate will er das Haus seines Nachbars kaufen und wird mit demselben einig, dass derselbe ihm das Haus für eine Barzahlung von 2000 ℳ und Ueberlassung des Restes jener Rente überlässt. Wie teuer war das Haus, wenn der Berechnung $4\frac{1}{2}\%$ Zinsen zu Grunde gelegt werden?

Andeutung. Die für das Haus bar geleistete Summe von 2000 Mark plus dem Barwert einer vorschüssigen Jahresrente von 1600 Mark, welche 19 Jahre zu laufen hat, ist gleich dem Kaufpreis des Hauses zur Zeit des fünften Rentenbezugs.

Aufgabe 407. Jemand ist gegenwärtig 22 Jahre alt und zahlt, um sich von seinem 40. Jahre an auf 30 Jahre eine jährliche, am Ende eines jeden Jahres fällige Rente von 1800 ℳ zu erwerben, bis dahin am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe an eine Rentenbank. Wie gross muss diese jährliche Zahlung sein, wenn der Zinsfuss $= 3\frac{3}{4}\%$ ist?

Andeutung. Der Endwert der während 40 — 22 Jahren gemachten jährlichen Einzahlungen muss gleich dem baren Wert einer nachschüssigen Jahresrente sein, welche 30 Jahre zu laufen hat.

Aufgabe 408. Jemand will sich nach Ablauf von 18 Jahren eine 15 Jahre lang, nachschüssig beziehbare Rente von 1400 ℳ erwerben; welche Summe hat derselbe von jetzt an am Anfange eines jeden Jahres zu entrichten, wenn der Berechnung der Zinsfuss $3\frac{1}{2}\%$ zu Grunde gelegt wird?

Andeutung. Man setze eine Gleichung an zwischen dem Barwert einer aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente und einer vorschüssigen Jahresrente.

Aufgabe 409. Jemand schätzt seine Arbeitskraft noch auf 15 Jahre. Während dieser Zeit will er jährlich 550 ℳ bei einer Rentenanstalt einzahlen. Welche Jahresrente wird er nach Ablauf von jenen 15 Jahren beziehen können, wenn seine übrige Lebensdauer zu 20 Jahr taxiert wird, die Zinsen zu $3\frac{3}{4}\%$ gerechnet?

Andeutung. Analog der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 410. Wie lange muss ein Kapital von 8500 ℳ auf Zinseszinsen stehen, dass es dann 26 Jahre hindurch eine Jahresrente von 2000 ℳ liefert, wenn 5% Zinsen berechnet werden?

Andeutung. Der Endwert des Kapitals von 8500 Mark nach x Jahren bei 5% Zinseszinsen muss gleich dem für diese Zeit berechneten baren Wert der nachschüssigen Jahresrente sein.

Aufgabe 411. Jemand schätzt seine Arbeitskraft noch ausreichend auf 24 Jahre. In dieser Zeit spart er jährlich 540 ℳ und legt sie auf Zinsen. Wie lange kann er hierfür nach Ablauf der 24 Jahre noch eine Jahresrente von 5200 ℳ geniessen, die Zinsen zu 4% gerechnet?

Aufgabe 412. Jemand gibt 6000 ℳ auf eine Rentenanstalt und will 20 Jahre hindurch jährlich eine gewisse Summe zulegen, so dass er nach 20 Jahren noch 20 Jahre hindurch eine Jahresrente von 3000 ℳ beziehen kann. Wie gross muss jene Summe sein, wenn der Zinsfuss $= 4\frac{1}{2}\,\%$ ist.

Andeutung. Der Wert der gemachten Einzahlungen nach 20 Jahren muss gleich dem für diese Zeit berechneten Barwert der gedachten Rente sein.

Aufgabe 413. Jemand, der 15000 ℳ auf Zinsen hat, hofft noch 30 Jahre zu leben. Er will sein Kapital so lange jährlich um 500 ℳ vermehren, dass er den Rest seines Lebens eine Jahresrente von 2500 ℳ hat. Wieviel Jahre muss er sparen, 4 % gerechnet?

Andeutung. Vermehrt er sein auf Zinseszinsen ausgeliehenes Kapital x Jahre lang, so ist die Dauer der Rente $30 - x$ Jahre. Im übrigen analog wie vorhin.

Aufgabe 414. Es zahlt jemand einem Bankier 12 Jahre hindurch jährlich zu Anfang eines jeden Jahres eine bestimmte Summe, lässt die folgenden 10 Jahre das Geld bei demselben frei stehen und erhält alsdann die folgenden 20 Jahre eine Jahresrente von 4500 ℳ am Schlusse jeden Jahres ausgezahlt. Wie hoch sind die ersten Einzahlungen bei $4\frac{1}{2}\,\%$ Zinsberechnung?

Andeutung. Man setze den Endwert, welchen man für die Einzahlungen bis zu Ende des 22. Jahres findet, gleich dem Barwert der Rente.

Aufgabe 415. Welche am Ende eines jeden Jahres, im ganzen siebenmal, und zwar zuerst am Ende des 11. Jahres zahlbare Rente kann man sich mit einer von jetzt ab am Ende eines jeden Jahres, im ganzen zehnmal zu bezahlenden Einlage von 1000 ℳ erkaufen, wenn die Zinseszinsen zu 4 % berechnet werden?

Aufgabe 416. Jemand zahlt am Anfang seines 45. Jahres 20000 ℳ bei einer Alterversicherungsgesellschaft ein, um vom 65. Jahre ab eine am Schlusse jeden Lebensjahres zahlbare Pension von 3150 ℳ zu beziehen. Wieviel Jahre kann er dieselbe erhalten, wenn die Gesellschaft das Geld zu $3\frac{1}{2}\,\%$ verzinst?

Aufgabe 417. Wie gross muss die Jahresrente sein, die 10 Jahre hindurch zu zahlen ist, wenn sie einen gleichen baren Wert haben soll mit einer Jahresrente von 4000 ℳ, die 15 Jahre lang gezahlt wird, wenn das Geld zu 4 % benutzt werden kann?

Andeutung. In betreff dieser und der folgenden Aufgaben, welche sich auf Verwandlung von Renten beziehen, siehe die gelösten Aufgaben 353 bis 360.

Aufgabe 418. Jemand will eine nachschüssige Jahresrente von 800 ℳ, welche 15 Jahre beziehbar ist, für eine andre nachschüssige Jahresrente, die nur 10 Jahre beziehbar ist, umtauschen. Wie gross muss die Rate der letzten Rente sein, wenn der übliche Zinsfuss = 4 % ist?

Aufgabe 419. Man soll eine 12 Jahre dauernde $3\frac{1}{2}$prozentige nachschüssige Jahresrente von 1450 ℳ in eine 5prozentige 18 Jahre dauernde Rente umwandeln; wie gross ist eine Rate der letzteren?

Aufgabe 420. Man soll eine 12 Jahre dauernde $3\frac{1}{2}$prozentige nachschüssige Jahresrente von 1450 ℳ in eine ebenfalls $3\frac{1}{2}$prozentige aber 18 Jahre dauernde Rente umwandeln; wie gross ist eine Rate der letzteren?

Aufgabe 421. Man soll eine 12 Jahre dauernde $3\frac{1}{2}$prozentige nachschüssige Jahresrente von 1450 ℳ in eine 4prozentige und ebenfalls 12 Jahre dauernde Rente umwandeln; wie gross ist eine Rate der letzteren?

Aufgabe 422. Eine nachschüssige Jahresrente von 1200 ℳ, die 15 Jahre läuft, soll in eine andre verwandelt werden, die 20 Jahre lauft. Wie hoch ist eine Rate der neuen Rente, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet?

Aufgabe 423. Wie hoch ist eine nachschüssige Jahresrente, die n Jahre läuft, wenn ihr barer Wert gleich einer Rente r ist, die n_1 Jahre läuft, die Zinsen in beiden Fällen zum Zinsfuss $p\,\%$ berechnet?

Aufgabe 424. Eine nachschüssige Jahresrente r hat noch n Jahre zu laufen. Sie soll in eine andre r_1 verwandelt werden. Wieviel Jahre wird diese laufen, zum Zinsfuss $p\,\%$ gerechnet?

Aufgabe 425. Eine nachschüssige Jahresrente, deren Raten $= r$ sind, und welche n Jahre lang zum Zinsfuss $p\,\%$ zu beziehen ist, soll in eine andre verwandelt werden, die n_1 Jahre lang zum Zinsfuss $p_1\,\%$ zu beziehen ist. Wie hoch wird eine Rate der letzteren sein?

Aufgabe 426. Eine Rente von 1000 ℳ, am Ende eines jeden Jahres fällig, soll in eine Rente umgewandelt werden, die alle $\frac{1}{3}$ Jahr fällig ist und ebensolange läuft, wie die erste. Wie hoch wird sich diese Vierteljahrsrente belaufen, wenn Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ berechnet werden?

Aufgabe 427. Jemand will eine Rente von 1500 ℳ, die 25 Jahre hindurch nach Ablauf jeden Jahres gezahlt wird, monatlich ausgezahlt haben. Wieviel wird er da erhalten, die Zinsen jährlich zu 5 % gerechnet?

Andeutung. Die nachschüssige Jahresrente von 1500 Mark ist unter sonst gleichbleibenden Umständen in eine andre nachschüssige $\frac{1}{12}$jährliche Rente zu verwandeln.

Aufgabe 428. Eine nachschüssige Jahresrente von 650 ℳ, die 18 Jahre zu laufen hat, soll in eine andre verwandelt werden, die 25 Jahre hindurch $\frac{1}{2}$jährlich gezahlt wird. Wie gross wird diese sein, die Zinsen jährlich zu 4 % gerechnet?

Aufgabe 429. Eine Rente von 2400 ℳ, welche 12 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres fällig ist, soll in eine andre umgewandelt wer-

den, die 15 Jahre lang am Ende eines jeden halben Jahres zahlbar ist. Wieviel beträgt die eine Rente, wenn die Zinseszinsen zu 4 % gerechnet werden?

Aufgabe 430. Eine nachschüssige Jahresrente r, welche n Jahre läuft, ist an barem Wert gleich einer andern nachschüssigen Jahresrente r_1, welche ebenfalls n Jahre läuft, aber erst am Ende des a Jahres beginnt. Wie gross ist die letztere Rente r_1, wenn für beide Renten der Zinsfuss zu p % angenommen wird?

Aufgabe 431. Eine Jahresrente r hat noch n Jahre zu laufen, zum Zinsfuss q gerechnet. Sie soll in eine andre r_1 verwandelt werden, deren Zinsfuss q_1 ist. Wie lange wird die neue Rente zu laufen haben?

Aufgabe 432. Eine jährliche Rente von 1200 ℳ auf 25 Jahre soll in eine grössere, die nur 10 Jahre hindurch auszuzahlen ist, verwandelt werden; wie gross ist eine Rate der letzteren unter der Voraussetzung, dass der Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ % beträgt?

Aufgabe 433. Jemand besitzt eine Rente von 2000 ℳ, die noch durch 30 Jahre zu beziehen ist; welche Rente kann er dafür bekommen, wenn sie nur durch 20 Jahre bezogen werden soll und $3\frac{3}{4}$% Zinsen gerechnet werden?

Aufgabe 434. Jemand ist berechtigt, eine durch 20 Jahre andauernde, am Ende eines jeden Jahres fällige Rente von 1200 ℳ zu beziehen. Wenn er den Genuss derselben durch volle 8 Jahre verschiebt, somit die Rente das erstemal zu Ende des 9. Jahres bezieht, wie gross wird alsdann diese nur 12 Jahre andauernde Rente sein bei $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen?

Aufgabe 435. Jemand hat 12 Jahre eine Rente von 9000 ℳ zu geniessen, wie lange muss er ihrem Genusse entsagen, um dann 8 Jahre hindurch eine Rente von 1500 ℳ haben zu können, wenn die Zinseszinsen mit 4 % gerechnet werden?

Aufgabe 436. Ein Rentner besitzt eine vorschüssige Rente von 2000 ℳ, zahlbar durch 20 Jahre. Ein Jahr bevor die Rente das erstemal fällig werden soll, trifft er mit der Rentenanstalt ein Uebereinkommen dahin, diese Rente in eine andre zu verwandeln, die erst nach 6 Jahren beginnt, dann aber jedes halbe Jahr durch 15 Jahre hindurch ausbezahlt werden soll. Wieviel wird diese Rente betragen, wenn die Bank 4 % Zinsen verrechnet?

Aufgabe 437. Eine nachschüssige Rente von 1500 ℳ ist 25 Jahre lang zu beziehen. Zu welcher Zeit kann man dieselbe mit 1500 . 25 ℳ auf einmal beziehen, wenn die Zinseszinsen zu 4 % gerechnet werden?

Andeutung. Analog den gelösten Aufgaben 347 u. 348.

Aufgabe 438. Eine Rente von 700 *M.* ist 30 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres zu beziehen. Zu welcher Zeit kann man dieselbe mit 700 . 30 = 21000 *M.* auf einmal bezahlen, wenn die Zinseszinsen zu $4\frac{3}{4}$ % gerechnet werden?

Aufgabe 439. Wie gross ist der bare Wert einer alljährlich in geometischer Progression mit dem Quotienten $1\frac{1}{10}$ steigenden Rente von 2500 *M.*, welche am Schlusse jeden Jahres, im ganzen zwölfmal ausgezahlt wird, bei $3\frac{1}{2}$ % Zinseszinsberechnung?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 364, bezw. mit Benutzung der Formel 64.

Aufgabe 440. *A* legt mit vollendetem 25. Lebensjahre $k = 9000$ *M.* in eine Bank ein, um sich oder seinen Erben eine nach $a = 30$ Jahren beginnende, durch $n = 15$ Jahre dauernde vorschussweise Rente, welche von Jahr zu Jahr um $b = 100$ *M.* steigt, zu sichern. Wie gross wird der erste Rentenbezug sein, wenn die Bank 4 % rechnet?

Andeutung. Analog der gelösten Aufgabe 366, bezw. mit Benutzung der Formel 66.

Aufgabe 441. Wie gross ist der bare Wert einer nachschüssigen Jahresrente, die n Jahre zu laufen hat und das erste Jahr r *M.* beträgt, in jedem folgenden Jahr aber d % mehr als im vorhergehenden, den Zinsfuss zu p angenommen?

Aufgabe 442. Auf welche Summe wächst eine jährlich in arithmetischer Progression mit der Differenz d (= 40) steigende Einlage von r (= 200) *M.*, welche zu Anfang jeden Jahres bei einer Kasse eingezahlt wird, bis nach Beginn des n (= 8). Jahres an? Zinseszins p (= 4) %.

Aufgabe 443. Eine Jahresrente, welche 20 Jahre läuft, steigt in der arithmetischen Progression 100 *M.*, 200 *M.*, 300 *M.*, ... wie gross ist ihr barer Wert, wenn 5 % Zinseszins gerechnet wird?

Aufgabe 444. Wie gross ist der bare Wert einer jährlich in arithmetischer Progression mit der Differenz von 70 *M.* steigenden Rente von 230 *M.*, welche am Schlusse jeden Jahres, im ganzen n mal, gezahlt wird, bei Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ %?

Aufgabe 445. Jemand hat eine nachschüssige Jahresrente, deren aufeinanderfolgende Raten in der arithmetischen Reihe:

$$r, 2r, 3r, \ldots . nr$$

wachsen, zu beziehen. Welches ist der bare und der Endwert dieser Rente, wenn der Zinsfuss p % beträgt?

Aufgabe 446. Welche Summe ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, wenn man eine nachschüssige Rente, die im Verhältnis von 1, 2, 3, 4 von Jahr zu Jahr steigt, erhalten will und wenn die erste Rate 47 *M.* 63 *Pf* beträgt, der Zinsfuss zu 4 % angenommen wird?

III. Teil.

Enthaltend:

A. Gemischte praktische Aufgaben über die Zinseszins- und Rentenrechnung nebst Andeutungen.

B. Hülfstafeln.

C. Zusammenstellung der in diesem Buche entwickelten Formeln über die Zinseszins- und Rentenrechnung.

D. Uebersichtliche Zusammenstellung des Inhalts der in diesem Buche gelösten Aufgaben.

A. Gemischte praktische Aufgaben über die Zinseszins- und Rentenrechnung

nebst Andeutungen.

Anmerkung 14. Bei Lösung der nachfolgenden Aufgaben können teilweise die Rentenformeln, teilweise die Zinseszinsformeln benutzt werden.

1). Aufgaben über Ersparungen.

Aufgabe 447. Jemand erspart sich von seiner Einnahme jährlich 470 Mark und legt dieselben am Ende eines jeden Jahres zu $3^3/_4\,\%$ auf Zinseszinsen an. Welches Kapital hat sich derselbe in 20 Jahren erspart?

Andeutung. Man hat den Endwert einer nachschüssigen Jahresrente von 470 Mark, welche 20 Jahre läuft, zu bestimmen. Zinsfuss $= 3^3/_4\,\%$.

Aufgabe 448. Jemand erspart sich im 1. Jahr 1, im 2. Jahr 2, im 3. Jahr 3 Mark u. s. w., nämlich jedes Jahr 1 Mark mehr als im vorhergehenden, und legt jede Ersparung sofort auf Zinseszinsen an. Wieviel beträgt die Summe aller Ersparungen am Ende des 20. Jahrs?

Andeutung. Die jährlichen Ersparungen bilden die Raten einer nachschüssigen Rente, welche nach arithmetischer Progression wachsen; der Endwert der Rente ist gesucht. Im übrigen siehe die gelöste Aufgabe 365.

Anmerkung 15. Hierher gehören auch einige der Aufgaben 270—276.

2). Aufgaben über Schuldentilgungen, Amortisationen, Abfindungen etc.

α). Aufgaben über die Berechnung von Terminalzahlungen.

Aufgabe 449. Ein Staat macht ein Anlehen von 5 Millionen Mark zu $3^1/_2\,\%$ und will dasselbe in 25 Jahren dadurch tilgen, dass jährlich eine bestimmte Summe, worin die Zinsen mit inbegriffen sind, bezahlt wird. Wie gross ist eine solche Tilgungsquote?

Andeutung. Derartige Aufgaben kann man, wie in dem I. Teil, in der Zinseszinsrechnung gezeigt wurde, lösen, man kann sie aber auch mittels der im II. Teil aufgestellten entsprechenden Rentenformeln lösen, wenn man berücksichtigt, dass z. B. hier die Schuld als der bare Wert einer nachschüssigen Jahresrente gedacht werden kann und dann die Tilgungsquoten die Raten einer solchen Rente vorstellen.

Aufgabe 450. Eine gegenwärtige Schuld von 40000 Mark soll in 8 jährlichen Terminen in gleichen Summen abgetragen werden. Wie hoch muss eine solche Terminalzahlung sein, wenn der Zinsfuss $3^1/_2\,\%$ beträgt?

Aufgabe 451. Im Jahr 1883 hat eine Stadt eine $3^1/_2$prozentige Anleihe von $2^1/_2$ Millionen Mark kontrahiert (ge-

zeichnet) und zu deren Tilgung einen auf 50 Jahre lautenden Plan entworfen. Welche Summe ist nach diesem Plan an Kapital und Zinsen jährlich abzutragen?

Aufgabe 452. Ein Staatsanlehen soll in den n (= 6) ersten Jahren mit p (= 5) % verzinst; von da ab sollen die Zinsen auf p_1 (= $4\frac{1}{2}$) % herabgesetzt (konvertiert) werden. Wieviel % des ursprünglichen Kapitals müssen von Anfang an zur Zinszahlung und allmählichen Tilgung bestimmt werden, wenn durch Zahlung dieser sich immer gleichbleibenden Summen die Tilgung in t (= 25) Jahren vollständig erfolgen soll?

Andeutung. Werden x % des ursprünglichen Kapitals jenes Staatsanlehens, bezeichnet durch S, zur jährlichen Tilgung verwendet, so betragen die jährlichen sich stets gleichbleibenden Tilgungsquoten je $= \frac{x \cdot S}{100}$; betrachtet man diese Quoten als die Raten einer nachschüssigen Jahresrente, welche t Jahre läuft, und bestimmt man den Endwert oder auch deren Barwert, so muss derselbe bis zur gänzlichen Tilgung der Schuld gleich dem Endwert (bezw. gleich dem Barwert) jener Summe S sein, welche die n ersten Jahre zu p, dann aber die $(t-n)$ weiteren Jahre zu p_1 % ausstand.

Aufgabe 453. Jemand hat jährlich 500 Mark zu zahlen, will dieselben aber in halbjährlichen Terminen entrichten; wieviel beträgt eine solche halbjährliche Zahlung, wenn der Berechnung der Zinsfuss = 4 % zu Grunde gelegt wird?

Andeutung. Die jährlichen Zahlungen von je 500 Mark bilden die Raten einer nachschüssigen Jahresrente, deren barer Wert gleich dem baren Wert der nachschüssigen $\frac{1}{2}$jährlichen Rente ist. Die Raten dieser Rente sind die gesuchten $\frac{1}{2}$jährlichen Zahlungen von je x.

Für die Anzahl der Jahre jener beiden Renten führe man den allgemeinen Buchstaben n ein, da sich derselbe aus der erhaltenen Gleichung wieder entfernen lässt, so ergibt sich hieraus, dass es hier auf die Anzahl der Jahre durchaus nicht ankommt.

Aufgabe 454. Eine $3\frac{1}{2}$prozentige Anleihe soll in 25 Jahren getilgt sein. Wieviel % des ursprünglichen Kapitals müssen jährlich zur Zinszahlung und Tilgung bestimmt werden?

Aufgabe 455. Eine Aktiengesellschaft braucht eine Summe von 100000 Mark. Sie kann das Anlehen nur dadurch realisieren, dass sie für je 97 Mark, die sie erhält, 100 Mark verschreibt, d. h. sie kann das Anlehen nur zum Kurse 97 zu stande bringen. Welche Summe muss die Gesellschaft für jene 100000 Mark verschreiben und wie gross ist die Annuität, wenn die Schuld mit $4\frac{1}{2}$% verzinst und in 20 Jahren durch jene am Schlusse jeden Jahres fälligen Annuitäten getilgt werden soll?

Andeutung. Die Tilgungsquoten bilden in ihrer Aufeinanderfolge die Raten einer nachschüssigen Jahresrente, weshalb sie hier auch „Annuitäten“ genannt werden. Der bare Wert dieser gedachten Rente ist der Aufgabe gemäss $= \frac{100 \cdot 100000}{97}$ Mark u. s. f.

Aufgabe 456. Jemand ist verpflichtet, durch 8 Jahre immer zu Ende eines Jahres 1094 Mark ohne Zinsen zu zah-

Andeutung. Bezeichnet man eine der gesuchten zwei gleichen Raten mit x, so ist der bare Wert derjenigen, welche sofort gezahlt

len; er möchte die ganze Schuld in 2 gleichen Raten tilgen, die erste sofort und die zweite zu Beginn des fünften Jahres; wie gross ist eine solche Rate, wenn 6 % Zinseszinsen gerechnet werden?

wird $= x$ und der bare Wert derjenigen, welche nach 5 Jahren gezahlt werden soll $= \frac{x}{1{,}06^5}$ Die Summe dieser Barwerte muss gleich sein dem Barwerte der am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Summe von 1094, bezw. muss gleich dem Barwerte einer nachschüssigen Jahresrente sein, deren Raten je 1094 Mark betragen und 8 mal fällig sind.

Aufgabe 457. A hat an B während n Jahren am Ende eines jeden Jahres die Summe r zu zahlen. B wünscht aber während derselben Zeit nur jedesmal am Schlusse von m Jahren eine entsprechende Tilgungsquote zu erhalten; wie gross muss eine solche Quote sein, wenn der Zinsfuss $= p$ % beträgt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe besteht in der Umwandlung einer nachschüssigen Jahresrente von r Mark, welche n Jahre läuft, in einer nachschüssigen Rente, deren Raten x alle m Jahre fällig sind und welche ebenfalls n Jahre läuft. Beiden Renten liegt der Zinsfuss p % zu Grunde. Zu berücksichtigen ist, ob n durch m ohne Rest teilbar ist: ist dies nicht der Fall, so verfahre man wie in der Aufgabe 342 gezeigt wurde.

Aufgabe 458. B hat an A am Ende eines jeden Jahres auf die Dauer von 8 Jahren eine Summe von 500 Mark zu fordern. B hat ein Unternehmen vor und wünscht, dass ihm A seine Forderung bis zu Ende des 6. Jahres in jährlichen Zahlungen abträgt. Welche Summe hätte A dem B am Ende eines jeden dieser 6 Jahre hiernach zu entrichten, wenn A den Wunsch des B erfüllen will und 5 % Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden?

Andeutung. Zur Lösung dieser Aufgabe hat man eine nachschüssige Jahresrente von 500 Mark, welche 8 Jahre läuft, in eine nachschüssige Jahresrente von x Mark, welche 6 Jahre läuft, zu verwandeln, wenn der Berechnung der Barwerte beider Renten der Zinsfuss 5 % zu Grunde gelegt wird.

Aufgabe 459. Eine Schuld von 2000 Mark, die jetzt zahlbar ist, soll durch 10 Zahlungen abgetragen werden, und zwar soll am Ende des 2. Jahres 2 mal, am Ende des 3. Jahres 3 mal soviel u. s. f. und am Ende des 10. Jahres 10 mal soviel als am Ende des 1. Jahres abgetragen werden. Wie gross sind die einzelnen Terminalzahlungen, wenn 4 % Zinseszinsen in Anrechnung kommen?

Andeutung. Die einzelnen Tilgungsquoten, von welchen die erste durch x bezeichnet wird, bilden die Raten einer nachschüssigen Rente, welche nach geometrischer Progression wachsen; der bare Wert der Rente ist gegeben. Im übrigen siehe die gelöste Aufgabe 364.

β). Aufgaben über die Berechnung barer Abfindungssummen.

Aufgabe 460. A hat dem B 5 mal hintereinander je am Ende des 2. Jahres 1000 Mark zu entrichten; mit welcher Barsumme kann A den B befriedigen, wenn $3\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden sollen?

Andeutung. Die gesuchte Barsumme kann man betrachten als den baren Wert einer nachschüssigen Rente, deren Raten von je 1000 Mark alle 2 Jahre fällig sind und welche $5 . 2 = 10$ Jahre zu laufen hat.

Aufgabe 461. A hat eine Realität gegen die Verpflichtung angekauft, n ($= 18$) Jahre hindurch jedesmal zu Beginn eines Jahres einen Betrag von r ($= 1200$) Mark zu bezahlen. Durch welche Summe kann A unmittelbar vor Zahlung der ersten Rate diese Verpflichtung ablösen, wenn der Rechnung p ($= 5$) % Zinsen zu Grunde gelegt werden sollen?

Andeutung. Die zu Beginn eines jeden Jahres zu entrichtenden Ratenzahlungen kann man in ihrer Aufeinanderfolge als die Raten einer vorschüssigen Jahresrente betrachten, deren barer Wert gesucht ist.

Aufgabe 462. Wie hoch ist der Bau eines Schulgebäudes veranschlagt, wenn die betreffende Gemeinde zur Herstellung dieses Gebäudes bei der Provinzialhülfskasse eine Schuld aufgenommen hat, von der man weiss, dass sie in 25 Jahren durch je am Ende eines Jahres zu leistende Quoten von 1450 Mark getilgt werden soll und dass die Kasse $3^1/_3$ % berechnet?

γ). Aufgaben über die Berechnung von Zahlungsterminen.

Aufgabe 463. Von einer Kreditanstalt leiht jemand die Summe von S Mark zu p % und zahlt der Anstalt jedes Jahr p_1 %, um dadurch unter der Voraussetzung, dass $p_1 < p$ ist, nicht allein die Zinsen zu decken, sondern auch nach einer Reihe von Jahren das Kapital selbst zu tilgen (zu amortisieren). Nach wieviel Jahren wird die Schuld S getilgt sein?

Andeutung. Die jährlich zu leistenden p_1 % einfachen Jahreszinsen des Kapitals S bilden die Raten einer nachschüssigen Jahresrente, deren barer Wert $= S$ ist.

Aufgabe 464. Eine Schuld soll in den ersten 8 Jahren mit 3 % verzinst, und zur Bezahlung dieser Zinsen und der allmählichen Tilgung der Schuld sollen halbjährlich $2^1/_2$ % von dem ursprünglichen Kapital bestimmt werden. Nach den ersten 8 Jahren soll auf einmal die Hälfte des Restes der Schuld bar bezahlt, die Zinsen des Restes sollen auf $4^1/_2$ % erhöht und zur Zinszahlung und fortgesetzten Tilgung der Schuld sollen wie von Anfang an halbjährlich $2^1/_2$ % des ursprünglichen Kapitals abgetragen werden. In wieviel Jahren wird auf diese Weise die Schuld getilgt werden?

Andeutung. Bezeichnet man die Schuld mit S, so sollen in den ersten 8 Jahren halbjährlich $\frac{2\frac{1}{2}\cdot S}{100}$ abgetragen werden. Man berechne hiernach den Rest der Schuld bis Ende des 8. Jahres. Wird von diesem Rest die Hälfte desselben subtrahiert, so muss der erhaltene Rest gleich dem für diese Zeit berechneten Barwert der nachschüssigen halbjährlichen Rente von $\frac{2\frac{1}{2}\cdot S}{100}$ sein, welche $(x-8)$ Jahre lang läuft.

Aufgabe 465. Durch wieviele, am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuitäten von 768 Mark 70 pf. wird eine Anleihe von 10000 Mark zu $4\frac{1}{2}$ % Zinsen amortisiert?

δ). Aufgaben über Berechnung des mittleren Zahlungstermins.

Aufgabe 466. Jemand hat n Jahre hindurch jährlich r Mark zu zahlen. Er wird mit dem Gläubiger einig, die ganze Schuld von $n \cdot r$ Mark auf einmal zu zahlen. Wann muss dies geschehen, wenn Keiner im Nachteil sein soll, den Zinsfuss zu p % angenommen? oder welches ist der sogen. mittlere Zahlungstermin?

Andeutung. Man betrachte die am Ende eines jeden Jahres zu machenden Zahlungen als die Raten einer nachschüssigen Jahresrente, deren mittlerer Zahlungstermin gesucht ist (s. Aufgabe 346).

Aufgabe 467. Jemand hat zu Anfang eines jeden Jahres n Jahre hindurch jährlich r Mark zu zahlen. Er wird mit dem Gläubiger einig, die ganze Schuld $r \cdot n$ Mark auf einmal zu entrichten. Wann muss dies geschehen, wenn Keiner im Nachteil sein soll, den Zinsfuss zu p % gerechnet, oder welches ist der sogen. mittlere Zahlungstermin?

Andeutung. Man betrachte die jährlich zu machenden Zahlungen als die Raten einer vorschüssigen Jahresrente, deren mittlerer Zahlungstermin gesucht ist.

Aufgabe 468. Jemand hat während 10 Jahren jedes Jahr 2500 Mark zu zahlen. Nach wieviel Jahren kann er die ganze Summe, 25000 Mark, auf einmal bezahlen, die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ % gerechnet, und zwar wenn die 2500 Mark

1). am Ende eines jeden Jahres,
2). am Anfang „ „ „

gezahlt werden sollen?

ε). Aufgaben über Diskontrechnungen.

Aufgabe 469. A hat an B ein Kapital k (= 10000 Mark) auf n (= 12) Jahre verliehen und zwar so, dass ihm am Ende eines jeden Jahres p (= $3\frac{1}{2}$) % einfache Zinsen entrichtet werden. B will sich dieser Schuld, da er plötzlich ein bedeutendes Vermögen ererbt, sofort entledigen. Welche Summe hat er bar zu bezahlen, wenn ihm A p_1 (= $4\frac{1}{2}$) % Diskonto bewilligt?

Andeutung. Die zu entrichtende Barsumme ist gleich dem baren Wert der am Ende eines jeden der n Jahre zu zahlenden p prozentigen einfachen Zinsen von je $\frac{p \cdot k}{100}$, welche in ihrer Aufeinanderfolge als die Raten einer nachschüssigen Jahresrente betrachtet werden können, vermehrt um den Barwert des nach n Jahren zahlbaren Kapitals k. Zu berücksichtigen ist, dass der Berechnung jener Barwerte der Zinsfuss p_1, nämlich der Zinsfuss, welcher angibt wieviel % Diskonto bewilligt werden, zu Grunde gelegt werden muss.

Aufgabe 470. *A* hat dem *B* 4850 Mark nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlbar geliehen. *B* will diese Schuld aber durch am Ende eines jeden Jahres zu leistende gleiche Ratenzahlungen tilgen. Wie gross muss eine solche Tilgungsquote sein, wenn *A* dem *B* $4\frac{1}{4}\%$ Diskonto bewilligt?

Andeutung. Die jährlichen Tilgungen bilden die Raten einer nachschüssigen Jahresrente, deren Endwert $W = 4850$ ist.

Aufgabe 471. *A* hat dem *B* nach je 4 Jahren 20 Jahre hindurch die Summe von 750 Mark zu entrichten. Welches ist der bare Wert dieser Schuld, wenn dieselbe mit $4\frac{3}{4}\%$ diskontiert wird?

Andeutung. Der bare Wert der Schuld ist gleich dem baren Wert einer nachschüssigen Rente, deren Raten alle 4 Jahre, 20 Jahre lang, fällig. Zinsfuss zu $4\frac{3}{4}\%$ angenommen.

3). Aufgaben über Zeitrenten, Lebensversicherungen und Witwenpensionen.

Aufgabe 472. Welche Summe muss jemand während 25 Jahren jährlich an eine Rentenanstalt zahlen, damit er nach dieser Zeit durch 25 Jahre eine Rente von 2500 Mark geniessen kann, $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet?

Andeutung. Der Endwert der vorschüssigen Jahresrente von x Mark, welche 25 Jahre läuft, muss gleich dem für diese Zeit berechneten Wert der vorschüssigen Jahresrente von 2500 Mark sein, welche 25 Jahre läuft, wenn der Berechnung beider Renten der Zinsfuss $4\frac{1}{2}\%$ zu Grunde gelegt wird.

Aufgabe 473. Ein Gutsbesitzer will seine Besitzungen in einer Hagelassekuranzgesellschaft versichern. Welche Versicherungsprämie hat derselbe bei einem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ zu Anfang eines jeden Jahres zu entrichten, wenn der Wert der durch Hagel zerstörten Früchte zu 4800 Mark abgeschätzt, und angenommen wird, dass alle 20 Jahre eine vollständige Zerstörung durch Hagelschlag stattfindet?

Andeutung. Die gesuchte jährlich zu zahlende Versicherungsprämie ist die Rate einer vorschüssigen ewigen Jahresrente, deren barer Wert gleich dem baren Wert einer nachschüssigen ewigen Rente ist, deren Raten von je 4800 Mark alle 20 Jahre fällig sind. Zinsfuss zu $3\frac{1}{2}\%$ genommen.

Aufgabe 474. Jemand versichert sein Leben, 25 Jahre alt, mit 40000 Mark, und zahlt zu dem Zwecke zu Anfang eines jeden Jahres 700 Mark bei einer Bank ein. Er stirbt 53 Jahre alt. Hat die Bank gewonnen oder verloren und wieviel, $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet?

Andeutung. Man berechne den Endwert der vorschüssigen Jahresrente von 700 Mark, welche (53 — 25) Jahre läuft. Ist derselbe grösser als die versicherte Summe von 40000 Mark, so hat die Bank soviel gewonnen als der Ueberschuss beträgt, etc.

Aufgabe 475. Es zahlt jemand 24 Jahre hindurch zu Anfang eines jeden Jahres 100 Mark Prämie an eine Kasse. Nach seinem Tode erhielt seine Witwe 10 Jahre hindurch halbjährlich 200 Mark. Hatte die Kasse Vorteil oder Nachteil

Andeutung. Man berechne den Endwert einer 24 Jahre lang laufenden vorschüssigen Jahresrente von 100 Mark. Dann berechne man den baren Wert einer nachschüssigen Rente, deren Raten von je 200 Mark alle $\frac{1}{2}$ Jahr, 10 Jahre lang, fällig sind. Die Differenz beider Werte ergibt den Vorteil bezw. Nachteil der Kasse.

davon und wieviel, wenn die erste Auszahlung $1^1/_2$ Jahre nach der letzten Einzahlung geschah, 4 % gerechnet?

Ist die erste Auszahlung an die Witwe erst nach $1^1/_2$ Jahren der letzten Einzahlung des Verstorbenen erfolgt, so hat man den baren Wert einer um $1^1/_2$ Jahr aufgeschobenen Rente, welche 10 Jahre lang läuft und deren Raten alle $^1/_2$ Jahr fällig sind, zu berechnen.

Aufgabe 476. Jemand versichert sein Leben am Anfang seines 38. Jahres mit 12000 ℳ und muss hierfür jährlich eine Prämie von 360 ℳ zahlen (die Prämienzahlungen geschehen am Anfang eines jeden Jahres). Wenn dieser Mann bald nach Beginn seines 65. Jahres stirbt, wie gross ist der Gewinn oder Verlust der Bank, die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet?

Aufgabe 477. Jemand versichert sein Leben mit 10000 Mark und muss dafür zu Anfang eines jeden Jahres eine Prämie von 270 Mark bezahlen. Nach der wievielten Zahlung haben seine Beiträge die versicherte Summe erreicht, oder sie überschritten, wenn man die Zinseszinsen zu $4^1/_2$ % berechnet?

Andeutung. Man stelle eine Gleichung auf zwischen dem Endwert einer vorschüssigen Jahresrente von 270 Mark, deren Raten x Jahre lang, bezw. x mal fällig sind, Zinsfuss $4^1/_2$ %, und der Versicherungssumme von 10000 Mark. Aus dieser Gleichung lässt sich x berechnen.

Aufgabe 478. Jemand will einem Dienstboten nach 20 Jahren bei einer Versicherungsanstalt eine Summe von 4000 Mark sichern. Welche Prämien hat er bis dahin zu zahlen, die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet?

Andeutung. Die versicherte Summe von 4000 Mark ist der Endwert einer vorschüssigen Jahresrente von x Mark, welche 20 Jahre läuft. Zinsfuss = $3^1/_2$ %.

Aufgabe 479. Es bezog jemand am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Rente, die er sogleich zu 4 % auslieh, da sein Verdienst zu seinem Unterhalte ausreichte, und ersparte sich auf diese Weise in 20 Jahren 18000 Mark; wie gross war die jährliche Rente, wenn der Zinsfuss der Rente ebenfalls 4 % beträgt und dieselbe 20 Jahre lang zu laufen hat?

Andeutung. Man stelle eine Gleichung auf zwischen dem Endwert einer nachschüssigen Jahresrente von x Mark, welche 20 Jahre läuft, und der ersparten Summe von 18000 Mark. Zinsfuss = 4 %.

Aufgabe 480. Um eine Witwenpension von jährlich $b = 200$ Mark zu kaufen, zahlt ein Mann an eine Witwenkasse jährlich $a = 50$ Mark. Wenn nun der Mann erst nach $n = 20$ und die Frau schon $m = 8$ Jahre später stirbt, wieviel hat dann die Witwenkasse gewonnen oder verloren, wenn beiderseits $p = 4$ % gerechnet wird?

Andeutung. Man suche die Differenz zwischen dem Endwerte einer vorschüssigen Jahresrente von 50 Mark, welche 20 Jahre läuft, und dem baren Wert einer nachschüssigen Jahresrente von 200 Mark, welche 8 Jahre läuft, Zinsfuss 4 %. Aus dieser Differenz ergibt sich der Gewinn oder der Verlust der Witwenkasse.

Aufgabe 481. Jemand hat jährlich 126 Mark in eine Witwenkasse pränumerando zu zahlen. Wenn er nun 20mal diese Beträge zahlt, und seine Witwe dann durch 9 Jahre 750 Mark jährliche Pension bezieht, die nach Ablauf des 1. Witwenjahres zum erstenmal gezahlt wird, auf welcher Seite ist der Verlust und wieviel, die Zinsen zu $3^1/_2$ % gerechnet?

Andeutung. Man berechne den Endwert einer vorschüssigen Jahresrente von 126 Mark, welche 20 Jahre läuft und den baren Wert einer nachschüssigen Jahresrente von 750 Mark, welche 9 Jahre läuft. Je nachdem ersterer Wert grösser oder kleiner ist als letzterer, ist der Verlust auf Seite des Rentenempfängers oder auf Seite der Witwenkasse.

Aufgabe 482. Jemand zahlt vom Beginn seines 29. bis zum Beginn seines 40. Lebensjahres, also 12mal, jedesmal zu Anfang des Jahres eine gewisse Summe in eine Rentenanstalt, um sich eine, durch 20 aufeinanderfolgende Jahre fällige Rente von 4000 Mark zu sichern. Wie gross ist die jährlich einzuzahlende Summe, wenn der erste Rentenbezug mit Ende des 40. Jahres beginnt und $3^1/_2$ % Zinseszinsen gerechnet werden?

Andeutung. Man stelle eine Gleichung auf zwischen dem Endwert einer vorschüssigen Jahresrente von x Mark, welche 12 Jahre läuft und dem baren Wert einer vorschüssigen Jahresrente von 4000 Mark, welche 20 Jahre läuft, Zinsfuss = $3^1/_2$ %.

Aufgabe 483. Jemand will durch 16 Jahre immer am Anfang eines jeden Jahres 400 Mark in eine Rentenkasse einzahlen, um sich oder seinen Erben eine, 14 Jahre nach dem Aufhören der Einzahlungen, also mit dem 31. Jahr beginnende, und durch 20 Jahre dauernde, am Anfang eines jeden Jahres fällige Rente zu sichern. Wie gross wird diese sein können, wenn die Rentenanstalt die Beträge mit $3^1/_4$ % jährlich kapitalisiert?

Andeutung. Man stelle eine Gleichung auf zwischen dem Endwert einer vorschüssigen Jahresrente von 400 Mark, welche 16 Jahre läuft und dann noch 14 weitere Jahre auf Zinseszinsen steht, und dem baren Wert einer nachschüssigen Jahresrente von x Mark, welche 20 Jahre läuft. Zinsfuss $3^1/_4$ %.

Aus dieser Gleichung findet man x.

Aufgabe 484. Jemand legt zu Beginn des 31. Lebensjahres 6000 Mark in einer Rentenanstalt an und gibt zu Beginn des 32. und der weiteren folgenden 9 Jahre 600 Mark auf Zinseszinsen dazu, um sich von seinem vollendeten 45. Jahre an eine durch 25 Jahre dauernde vorschussweise Rente zu sichern. Wie gross wird diese sein, wenn $4^1/_2$ % Zinsen den Berechnungen zu Grunde gelegt werden?

Andeutung. Man bilde die Summe der Endwerte von 6000 Mark, welche 15 Jahre lang auf Zinseszinsen stehen, und einer vorschüssigen Jahresrente von 600 Mark, welche 9 Jahre läuft und welche dann noch 5 Jahre auf Zinseszinsen steht. Setze dann diese Summe gleich dem baren Wert einer vorschüssigen Jahresrente von x Mark, welche 25 Jahre läuft. Zinsfuss 4 %.

Aus der somit erhaltenen Gleichung findet man x.

Aufgabe 485. Jemand will bei einer Rentenanstalt, welche 4 % Zinsen rechnet, eine jährliche Rente von 3200 Mark auf 20 Jahre beziehen. Welchen Betrag hat er sofort zu zahlen, wenn er jährlich eine Prämie von 800 Mark *nachzahlen* will und die erste Rente nach 8 Jahren fällig sein soll?

Andeutung. Man bilde die Summe des Endwertes der sofort zu zahlenden Summe x, welche 8 Jahre lang auf Zinseszinsen steht, und des Endwertes einer vorschüssigen Jahresrente von 800 Mark, welche 7 Jahre läuft. Dann setze man diese Summe gleich dem baren Wert einer vorschüssigen Jahresrente von 3200 Mark, welche 20 Jahre zu beziehen ist. Zinsfuss 4 %.

Aus der somit erhaltenen Gleichung findet man x.

Aufgabe 486. Jemand will bei einer Rentenanstalt, welche 4 % Zinsen rechnet, eine jährliche Rente von 3200 Mark auf 20 Jahre beziehen. Welche Prämie hat er vom Anfang jedes folgenden Jahres nachzuzahlen, wenn er sofort 18000 Mark einzahlt und wenn die erste Rente nach 8 Jahren fällig sein soll?

Andeutung. Man bilde die Summe des Endwertes der sofort gezahlten Summe von 18000 Mark, welche 8 Jahre lang auf Zinseszinsen steht, und des Endwertes einer vorschüssigen Jahresrente von 800 Mark, welche 7 Jahre läuft. Setze dann diese Summe gleich dem baren Werte einer vorschüssigen Jahresrente von 32000 Mark, welche 20 Jahre läuft, Zinsfuss = 4 %. Aus der somit erhaltenen Gleichung findet man x.

4). Aufgaben über die Ablösung ewigwährender Verpflichtungen.

Aufgabe 487. Welches ist die bare Ablösungssumme für einen jährlich zu entrichtenden Betrag von 450 Mark, wenn der Zinsfuss = $4\frac{1}{2}$ % beträgt?

Aufgabe 488. Zum Zwecke der Zehntablösung soll eine Gemeinde eine Barzahlung von 30000 Mark machen, oder im Falle sie diese Barzahlung nicht leisten kann, das Kapital zu $3\frac{1}{2}$ % verzinsen. Der Gemeindebeschluss lautet dahin, an der Ablösungssumme jährlich 1500 Mark abzutragen. Nach wieviel Jahren wird sich die Gemeinde jener Last enthoben haben?

Andeutung. Der Barwert der nachschüssigen Jahresrente von 1500 Mark bei $3\frac{1}{2}$ % Zinseszinsberechnung muss = den 30000 Mark sein.

Aufgabe 489. Auf einem Gute ruht das Servitut, allemal das 3. Jahr 50 Mark an die Gemeinde zu entrichten. Welche Ablösungssumme ist erforderlich, um sich dieser Last bei einer Grundrentenbank zu entledigen, wenn dieselbe 3 % in Anrechnung bringt und wenn die Ablösung an dem Tage erfolgt, an welchem eine solche Ratenzahlung von 50 Mark fällig war?

Andeutung. Gesucht ist der bare Wert einer ewigen Rente, deren Raten von je 50 Mark alle 3 Jahre fällig sind.

Aufgabe 490. Die Unterhaltungskosten eines alten Gebäudes betragen jährlich 350 Mark; dieses Gebäude wird nach 40 Jahren baufällig und wird ein andres Gebäude an dessen Stelle aufgebaut, dessen Unterhaltungskosten sich jährlich nur auf 280 Mark belaufen. Wie gross ist der Kapitalanschlag zur Bestreitung jener Reparaturen, wenn der übliche Zinsfuss zur Zeit des Bestehens des alten Baues gleich 5 %, dann aber gleich $4\frac{1}{2}$ % betrug?

Andeutung. Der gesuchte Kapitalanschlag zur Bestreitung der sämtlichen Reparaturen ist gleich dem Barwert einer nachschüssigen Jahresrente von 350 Mark, welche 40 Jahre läuft und welcher der Zinsfuss 5 % zu Grunde liegt, vermehrt um den Barwert einer um 40 Jahre aufgeschobenen ewigen Jahresrente von 280 Mark, welcher der Zinsfuss $4\frac{1}{2}$ % zu Grunde liegt.

Aufgabe 491. Die Unterhaltungskosten eines bestehenden Gebäudes betragen jährlich 230 Mark; nach Taxation wird dieses Gebäude nach 50 Jahren baufällig und die jährlichen Unterhaltungskosten des vergrösserten Neubaues, welcher an die Stelle jenes Gebäudes treten soll, zu 300 Mark abgeschätzt. Wie hoch beläuft sich der Kapitalanschlag, bezw. der bare Wert der Unterhaltungskosten, wenn der Zinsfuss im allgemeinen $= 4^1/_2\,\%$ beträgt, aber bis zur Zeit des 1. Neubaues zur Berechnung des baren Wertes der Unterhaltungskosten des alle 100 Jahre wiederkehrenden Neubaues der Zinsfuss nur zu 3 % angenommen wird?

Andeutung. Die Lösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog den vorigen.

Der bare Wert der Unterhaltungskosten, der sog. Kapitalanschlag derselben, ist gleich dem baren Wert einer nachschüssigen Jahresrente von 230 Mark, welche 50 Jahre läuft und welcher der Zinsfuss $4^1/_2\,\%$ zu Grunde liegt, vermehrt um den baren Wert einer um 50 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Jahresrente von 300 Mark, welcher während der ersten 50 Jahre der Zinsfuss 3 %, von da ab aber, der frühere Zinsfuss von $4^1/_2\,\%$ zu Grunde liegt.

Zur Berechnung des baren Wertes der letzteren Rente berechne man zuerst den baren Wert einer nachschüssigen ewigen Jahresrente von 300 Mark, welcher der Zinsfuss $4^1/_2\,\%$ zu Grunde liegt und dann berechne man den baren Wert dieser somit erhaltenen Summe, welche man sich nach 50 Jahren fällig und bis dahin zu 3 % verzinst zu denken hat.

Aufgabe 492. Die Dauer eines Gebäudes wird auf 45 Jahre taxiert; der nach dieser Zeit erforderliche Neubau bedingt einen Kostenaufwand von 42 500 Mark und wird dessen Dauer auf 150 Jahre taxiert. Wie gross ist der Kapitalanschlag der Baulast, wenn die nach je 150 Jahren erforderlichen Neubauten stets jene Bausumme beanspruchen sollen und wenn der Berechnung im allgemeinen der Zinsfuss $4^1/_2\,\%$ zu Grunde gelegt wird, die Zinseszinen aber nur zu 2 % berechnet werden sollen?

Andeutung. Der Kapitalanschlag der Baulast ist gleich dem Barwerte einer um 45 Jahre aufgeschobenen ewigen nachschüssigen Rente, deren Raten von je 42500 Mark alle 150 Jahre fällig sind.

Bei Berechnung des baren Wertes dieser Rente muss Rücksicht genommen werden, dass die Zinsen der einzelnen Bausummen zu $4^1/_2\,\%$, der Zins der Zinsen aber nur zu 2 % angenommen werden sollen. Siehe die gelösten Aufgaben 362 und 363.

Aufgabe 493. Die Gemeinde A ist verpflichtet, eine über einen Bach führende und 4800 Mark kostende Brücke jedesmal wieder aufzuführen, sobald die alte unbrauchbar geworden ist. Wenn dies nun nach 12 Jahren zum erstenmal der Fall ist und sich nach je 40 weiteren Jahren wiederholt, wie gross ist dann das Kapital, mit welchem die Gemeinde diese Verpflichtung ablösen kann, wenn $3^1/_2\,\%$ Zins gerechnet wird?

Andeutung. Die Ablösungssumme ist gleich dem baren Wert einer um 12 Jahre aufgeschobenen ewigen Rente, deren Raten von je 4800 Mark alle 40 Jahre fällig sind, zum Zinsfuss $3^1/_2\,\%$.

Aufgabe 494. Die Gemeinde A hat die Verpflichtung der jedesmaligen Herstellung einer Brücke auf dem Eigentum der Gemeinde B. Der Neubau erfolgt durchschnittlich nach je 38 Jahren und erfordert einen Kostenaufwand von 2000 Mark. Die Gemeinde A wünscht nun diese Last entweder:

Andeutung. Die bare Ablösungssumme ist gleich dem baren Wert einer vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten von je 2000 Mark alle 38 Jahre fällig sind.

Will die Gemeinde eine gewisse Summe x am Ende eines jeden Jahres anstatt jener baren Ablösungssumme zahlen, dann muss der bare Wert derjenigen ewigen nachschüssigen Jahresrente, deren Raten $= x$ sind, gleich jener berechneten Ablösungssumme sein.

a). zu gleichen Teilen am Ende eines jeden Jahres abzutragen, oder
b). dieselbe bar abzulösen;
wieviel beträgt im ersten Falle die jährliche Zahlung, oder im zweiten Falle die bare Ablösungssumme, wenn eben erst der letzte Neubau vollendet wurde und ein Zinsfuss von 4 % zu Grunde gelegt wird?

In beiden Rechnungen ist der Zinsfuss = 4 % anzunehmen.

Aufgabe 495. Eine Domänenkammer hat die Verpflichtung, einer Gemeinde eine neue Brücke zu bauen, so oft die alte unbrauchbar geworden. Erfahrungsgemäss geschieht dies alle 30 Jahre. Die Brücke kostet dann jedesmal 21 000 Mark. Mit welcher Summe kann die Kammer ihre Verpflichtung ablösen, wenn der Zinsfuss zu 4 % angenommen wird, und zwar
a). wenn die Brücke eben gebaut, und
b). wenn die Brücke vor 7 Jahren gebaut worden ist?

Andeutung. Bei der durch Rechnung zu lösenden Frage a). hat man den baren Wert einer ewigen nachschüssigen Rente zu berechnen, deren Raten von je 21 000 Mark alle 30 Jahre fällig sind.

Bei der durch Rechnung zu lösenden Frage b). hat man den baren Wert einer um 23 Jahre aufgeschobenen ewigen nachschüssigen Rente zu berechnen, deren Raten von je 21 000 Mark alle 30 Jahre fällig sind.

Aufgabe 496. Zum Bau eines Badehauses an der Nordsee sind 1500 Mark erforderlich. Die Unterhaltungskosten belaufen sich jährlich auf 80 Mark. Wenn nun wegen hohen Eisganges alle 15 Jahre das Badehaus neu hergestellt werden muss, welches Kapital muss alsdann bei einer Grundrentenbank eingezahlt werden, damit dieselbe die Verpflichtung übernimmt, das Badehaus für immer zu erhalten, wenn sie $3\frac{3}{4}$ % Zinseszinsen rechnet?

Andeutung. Man hat die Summe der Barwerte von einer ewigen nachschüssigen Jahresrente von 80 Mark und von einer ewigen vorschüssigen Rente, deren Raten alle 15 Jahre fällig sind, zu berechnen.

Aufgabe 497. Ein Waldbesitzer hat die Verpflichtung, das erforderliche Bauholz zu allen von Zeit zu Zeit vorkommenden Neubauten eines Schulgebäudes unentgeltlich herzugeben. Der Schulvorstand will aber gegen eine ihm vom Waldbesitzer zu gewährende angemessene jährliche Rente auf diese Holzgerechtsame für immer verzichten. Es steht nach technischen Ermittelungen fest, dass das Schulgebäude nach seiner gegenwärtigen Beschaffenheit noch 100 Jahre stehen könne, wenn es mit einem Holzaufwande im Werte von 10 000 Mark umgebaut und dass dieser

Andeutung. Man hat eine Gleichung aufzustellen zwischen dem baren Wert einer nachschüssigen ewigen Jahresrente x und der Summe von 10 000 Mark und dem baren Wert einer um 100 Jahre aufgeschobenen ewigen Rente, deren Raten von je 10 000 Mark alle 200 Jahre fällig sind.

Neubau alle 200 Jahre mit einem gleichen Aufwande wiederholt werden muss. Wie gross ist jene Rente, wenn der Zinsfuss 4 % ist?

Aufgabe 498. Die Dauer eines Gebäudes, welches soeben fertig gestellt wurde und 40500 Mark Herstellungskosten verursachte, wird auf 100 Jahre geschätzt; ferner wird vorausgesetzt, dass alle 100 Jahre dieses Gebäude neu herzustellen ist und zwar für die ursprüngliche Bausumme.

Wie gross ist der Kapitalanschlag der Baulast, wenn der Zins des sogenannten Reädifikationsbetrags zu $2\frac{1}{2}$ % und der des Kapitals zu 5 % gerechnet wird.

Andeutung. Analog den gelösten Aufgaben 362 und 363.

5). Gemischte Aufgaben aus dem praktischen Leben.

Aufgabe 499. Jemand zahlte für ein Haus 10 Jahre hindurch zu Anfang jeden Jahres 5000 Mark. Wie gross war der Kaufwert des Hauses bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsberechnung?

Andeutung. Man berechne den Barwert einer vorschüssigen Jahresrente von 5000 Mark, welche 10 Jahre läuft. Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ %.

Aufgabe 500. Für ein Haus bietet *A* 30000 Mark bar, *B* 36000 Mark nach 3 Jahren, *C* 33000 Mark in 3 jährlichen Terminen, jedesmal 11000 Mark zu Anfang jeden Jahres zahlbar. Wer bot am meisten, wieviel bot er und wieviel mehr als die beiden andern, 5 % gerechnet?

Andeutung. Man berechne die Barwerte der drei Angebote.

Aufgabe 501. Zur Gründung einer Fabrik bildet sich eine Aktiengesellschaft mit einem Grundkapital von 600000 Mark. Die Fabrik wirft einen jährlichen Reinertrag von 53964 Mark 64 pf. ab. Nach wieviel Jahren sehen sich die Aktionäre im Besitze ihres Anlagekapitals, wenn angenommen wird, dass sie ihr Geld zu 4 % hätten verwerten können?

Andeutung. Der bare Wert der nachschüssigen Jahresrente von 53964,64 Mark, welche x Jahre zu laufen hat, muss unter Zugrundelegung des Zinsfusses von 4 % gleich der Summe von 600000 Mark sein.

Aufgabe 502. Jemand hat ein Grundstück im Werte von 18000 Mark, welches er verkaufen möchte, da sich ihm Gelegenheit bietet, sein Geld zu $6\frac{1}{2}$ % anzulegen. Es findet sich ein Käufer, der diese 18000 Mark bar bezahlen will und ein andrer, der in 10 aufeinanderfolgen-

Andeutung. Man berechne den baren Wert der vorschüssigen Jahresrente von 2000 Mark, welche 10 Jahre lang läuft, zu dem Zinsfuss von $6\frac{1}{2}$ %; ist dieser Barwert grösser als 18000 Mark, so ist das Angebot des 2ten Verkäufers das höhere.

den Jahren, immer zu Anfang eines jeden Jahres, eine Rente von 2000 Mark zahlen will. Welches Gebot ist für den Verkäufer das beste?

Aufgabe 503. Zur Gründung einer Fabrik, welche einen im voraus berechneten Nutzen von 12000 Mark jährlich abwirft, bildete sich eine Aktiengesellschaft mit einem Grundkapital von 150000 Mark. Nach wieviel Jahren circa sind die Aktionäre wieder im Besitz ihrer gemachten Einlagen, wenn angenommen wird, dass sich jener Voranschlag verwirklicht und der Verzinsung ihrer Gelder ein Zinsfuss von 4 % zu Grunde gelegt wird?

Andeutung. Den jährlichen Nutzen von 12000 Mark kann man als die Rate einer nachschüssigen Jahresrente betrachten, deren Wert in dem Zeitpunkte, in welchem sich die Aktionäre wieder im Besitze ihres Geldes sehen, also nach x Jahren, gleich dem Endwert der Gesamteinlagen von 150000 Mark nach diesen x Jahren sein muss.

Aufgabe 504. Der jährliche Ueberschuss der Einnahmen gegen die Ausgaben eines Staates beträgt jährlich 400000 Mark, welcher in den nächsten 10 Jahren für den Bau einer Staatseisenbahn bestimmt werden soll. Um diese Eisenbahn sofort in Angriff nehmen zu können, soll ein $3\frac{1}{2}$ prozentiges Anlehen aufgenommen werden, zu deren Tilgung der erwähnte jährliche Ueberschuss verwendet wird. Welche Höhe wird dieses Anlehen haben?

Andeutung. Das Anlehen muss gleich dem baren Wert der nachschüssigen Rente sein, deren Raten je = 400000 Mark betragen.

Aufgabe 505. Jemand beteiligte sich bei dem Bau einer Eisenbahn mit 8 Aktien, jede zu 500 Mark, und hatte dafür während der ersten 4 Jahre am Ende eines jeden Jahres die Summe von 1000 Mark bezahlt. Nach 3 weiteren Jahren, nach welchen die Eisenbahn vollendet war, übernahm sie der Staat gegen Rückerstattung der Kosten.

Welche Summe hat jener Beteiligte verloren oder gewonnen, wenn der Zinsfuss = 4 % ist?

Andeutung. Zur Bestimmung der gesuchten Summe x, welche angibt, was jener Beteiligte gewonnen oder verloren hat, beachte man, dass der Sinn der hierfür anzusetzenden Gleichung darin besteht, dass diese Summe x gleich dem Betrage ist, welche der Staat an jenen einzelnen zu entrichten hat, bezw. gleich ist dem Betrage jener 8 Aktien (8.500), vermindert um den für die Zeit der Rückerstattung berechneten Endwert der Einzahlungen, welche jener Beteiligte geleistet hat. Dieser Endwert der Einzahlungen ist gleich dem Endwert einer nachschüssigen Jahresrente, welche 4 Jahre dauert, und der drei weitere Jahre auf Zinseszinsen ausstehend zu denken ist. Das aus dieser Gleichung sich ergebende Resultat ist negativ, d. h. jener Beteiligte hat die sich ergebende Summe verloren.

Aufgabe 506. Ein reicher Mann will zur Unterhaltung und für den etwaigen Wiederaufbau eines kleinen Hospitals ein Grundkapital stiften. Welche Höhe muss dasselbe haben, wenn nach sorgfältiger Taxation

Andeutung. Das gesuchte Grundkapital ist gleich der Summe der Barwerte von drei ewigen nachschüssigen Renten.

Die erste dieser ewigen Renten ist eine nachschüssige Jahresrente von 100 Mark.

Die zweite dieser ewigen Renten ist eine nachschüssige ewige Rente, deren Raten von je 200 Mark alle 10 Jahre fällig sind.

a). zur Unterhaltung des Hospitals eine jährliche Ausgabe von 100 Mark,
b). für grössere Reparaturen alle 10 Jahre 200 Mark,
c). in 60 Jahren ein Wiederaufbau nötig ist, der einen Kostenaufwand von 25 000 Mark verursacht und dessen Dauer auf 150 Jahre geschätzt wird und alle 150 Jahre wiederkehrt?

Der landesübliche Zinsfuss betrage $3^1/_2$ %.

Die dritte dieser ewigen Renten ist eine nachschüssige, um 60 Jahren aufgeschobene Rente, deren Raten von je 25 000 Mark alle 150 Jahre fällig sind.

Aufgabe 507. Eine Dampfmaschine kostet 26 700 Mark, die jährlichen Unterhaltungskosten betragen 2400 Mark und alle 10 Jahre ist eine neue Maschine nötig. Welches Kapital ist erforderlich, eine solche Maschine anzuschaffen und für immer zu erhalten, die Zinsen zu 4 % gerechnet?

Andeutung. Das gesuchte Kapital ist gleich der Summe der Barwerte einer ewigen Jahresrente von 2400 Mark und einer ewigen Rente. deren Raten von je 26700 Mark alle 10 Jahre fällig sind.

6). Praktische Aufgaben aus der Forstwissenschaft.

Aufgabe 508. Ein Wald wirft nach 20 Jahren zum erstenmal und dann immerwährend soviel Holz ab, dass der jährliche Reinertrag = 3000 Mark beträgt. Welchen Wert repräsentiert dieser Wald, wenn der landesübliche Zinsfuss = 4 % ist?

Andeutung. Man hat den baren Wert einer um 20 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Jahresrente von 3000 Mark zu suchen.

Aufgabe 509. Ein Wald wirft nach 15 Jahren zum erstenmal soviel Holz ab, dass der jährliche Reinertrag = 6800 Mark beträgt. Nachdem er 16 Jahre lang diesen Betrag ergibt, kann im Laufe dieser Zeit die Kultur desselben so umgeändert werden, dass er von da ab einen jährlichen Reinertrag von 7500 Mark abwirft. Welchen Wert repräsentiert dieser Wald unter der gemachten Voraussetzung, wenn der Zinsfuss $3^1/_2$ % beträgt?

Andeutung. Der bare Wert des Waldes ist gleich dem baren Werte einer um 14 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente von 6800 Mark, welche 16 Jahre lang zu laufen hat, vermehrt um den baren Wert einer um 30 Jahre aufgeschobenen ewigen Jahresrente von 7500 Mark, wenn der Berechnung der beiden Renten der Zinsfuss = $3^1/_2$ % zu Grunde gelegt wird.

Aufgabe 510. Ein Wald wirft nach a Jahren zum erstenmal und dann immerwährend einen jährlichen Reinertrag von r Mark ab. Wie gross ist der Jetztwert dieses Waldes bei einem Zinsfuss von p %?

Andeutung. Ist die Aufgabe 508, nur in allgemeiner Form.

Aufgabe 511. Ein Wald wirft nach a Jahren während a weiteren Jahren einen jährlichen Reinertrag von r Mark ab, dann bleibt er ebensolange geschont, und hierauf wirft er wiederum während a Jahren einen jährlichen Ertrag von r Mark ab, dann bleibt er wieder ebensolange geschont, u. s. f. . . . Welches ist der bare Wert des Waldes bei einem Zinsfuss von $p\,^0/_0$?

Andeutung. Der bare Wert x des Waldes ist gleich dem baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Jahresrente von r Mark, welche a Jahre läuft, also nach der Formel 40, bei dem Zinsfuss $p\,^0/_0$:

$$= \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+a-1}} \text{ oder } = \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{2a-1}}$$

vermehrt um den baren Wert einer um $3a$ Jahre aufgeschobenen Jahresrente von r Mark, welche a Jahre läuft, der also nach der Formel 40, bei dem Zinsfuss $p\,^0/_0$:

$$= \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{3a+a-1}} \text{ oder } = \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{4a-1}}$$

vermehrt um den baren Wert einer um $5a$ Jahre aufgeschobenen Jahresrente von r Mark, welche a Jahre läuft, der also nach der Formel 40, bei dem Zinsfuss $p\,^0/_0$:

$$= \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{5a+a-1}} \text{ oder } = \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{6a-1}}$$

vermehrt um, u. s. f.; man hat somit die Gleichung:

$$x = \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{2a-1}} + \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{4a-1}} + \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{6a-1}} + \ldots \text{ inf.}$$

oder:

$$x = \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p} \cdot \left(\frac{1}{1{,}0p^{2a-1}} + \frac{1}{1{,}0p^{4a-1}} + \frac{1}{1{,}0p^{6a-1}} + \ldots \text{ inf.}\right)$$

Da nun die Summe in der Parenthese eine unendliche geometrische Reihe ist,

deren Anfangsglied $a = \frac{1}{1{,}0p^{2a-1}}$

deren Quotient $q = \frac{1}{1{,}0p^{2a}}$ und

deren Gliederzahl $n = \infty$ ist,

so hat man nach der Summenformel für eine unendliche geometrische Reihe (siehe Kleyers Lehrbuch der geometrischen Reihen):

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s = \frac{a}{1-q}$$

für jenen Klammerwert:

$$\frac{\frac{1}{1{,}0p^{2a-1}}}{1 - \frac{1}{1{,}0p^{2a}}}$$

oder =

$$\frac{1}{1{,}0p^{2a-1}} : \frac{1{,}0p^{2a} - 1}{1{,}0p^{2a}} = \frac{1{,}0p^{2a}}{1{,}0p^{2a-1}\,.\,(1{,}0p^{2a} - 1)}$$

$$\text{oder} = \frac{1{,}0p}{1{,}0p^{2a} - 1}$$

mithin ist der gesuchte bare Wert x:

$$= \frac{r\,.\,(1{,}0p^a - 1)\,.\,1{,}0p}{0{,}0p\,.\,(1{,}0p^{2a} - 1)} \text{ oder } = \frac{r\,.\,1{,}0p\,.\,(1{,}0p^a - 1)}{0{,}0p\,.\,(1{,}0p^{2a} - 1)}$$

Aufgabe 512. Nach gemachter Taxation wirft ein Wald am Ende des a (= 10). Jahres zum erstenmale und dann b (= 12) Jahre lang an gehauenem Holz einen jährlichen Reinertrag von r (= 1150) Mark ab; hierauf bleibt dieser Wald a_1 (= 8) Jahre unbenutzt und wirft von da ab b_1 (= 15) Jahre lang einen jährlichen Reinertrag von r_1 (= 1400) Mark ab; dann bleibt der Wald a_2 (= 6) Jahre unbenutzt und wirft von da ab einen immerwährenden jährlichen Reinertrag von r_2 (= 900) Mark ab. Welchen Wert hat der Wald zur Zeit jener Taxation, den Zinsfuss zu p (= 3½) % angenommen?

Andeutung. Zur Zeit der aufgestellten Taxation hat der Wald einen Wert x, welcher gleich ist dem baren Wert einer um a Jahre aufgeschobenen Jahresrente von r Mark, welche b Jahre dauert, also nach der Formel 40 und bei Annahme eines Zinsfusses von p%:

$$= \frac{r\,.\,(1{,}0p^b - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+b-1}} \text{ ist,}$$

vermehrt um den baren Wert einer um $(a+b+a_1)$ Jahre aufgeschobenen Jahresrente von r_1 Mark, welche b_1 Jahre dauert, der also nach der Formel 40, bei Annahme eines Zinsfusses von p %:

$$= \frac{r_1\,.\,(1{,}0p^{b_1} - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^{a+b+a_1-1}} \text{ ist,}$$

vermehrt um den baren Wert einer um $(a+b+a_1+b_1+a_2)$ Jahre aufgeschobenen Jahresrente von r_2 Mark, welche ewig dauert, der also nach der Formel 57, bei Annahme eines Zinsfusses von p %:

$$= \frac{100\,.\,r_2}{p\,.\,1{,}0p^{a+b+a_1+b_1+a_2-1}} \text{ ist.}$$

Durch Summation dieser drei Barwerte erhält man den gesuchten Barwert x. Für die gegebenen Zahlenbeispiele vereinfacht sich dieser Ausdruck.

Aufgabe 513. Der Hieb eines Waldes liefert in einem 80jährigen Turnus während der ersten 20 Jahre desselben einen jährlichen Reinertrag von 500 Mark, während der folgenden 20 Jahre einen solchen von 650 Mark, während der weiteren 20 Jahre einen solchen von 850 und während der letzten 20 Jahre einen solchen von 1100 Mark. Welches ist der bare Wert des Waldes, wenn man weiss, dass nach jenem Turnus der jährliche Reinertrag des Waldes durchschnittlich 450 Mark beträgt und man den Zinsfuss zu $4\frac{1}{2}$ % annimmt?

Andeutung. Der bare Wert des Waldes ist gleich dem Barwert einer nachschüssigen Jahresrente von 500 Mark, welche 20 Jahre lang läuft, plus dem Barwert einer um 20 Jahre aufgeschobenen Jahresrente von 650 Mark, welche wiederum 20 Jahre läuft, plus dem Barwert einer um 40 Jahre aufgeschobenen Jahresrente von 850 Mark, welche ebenfalls 20 Jahre läuft, plus dem Barwert einer um 60 Jahre aufgeschobenen Jahresrente von 1100 Mark, welche auch 20 Jahre läuft, plus dem Barwert einer um 80 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Jahresrente, welche ewig läuft. Diesen fünf Renten muss der Zinsfuss $4\frac{1}{2}$ % zu Grunde gelegt werden.

Aufgabe 514. Das Alter eines Waldes beträgt gegenwärtig 35 Jahre; wenn man nun weiss, dass die ursprünglichen Kulturkosten 100 Mark, die jährlichen Steuern 5 Mark 40 pf. betrugen, und dass der Wald in seinem 25. Jahre einen sogenannten Durchforstungsertrag von 580 Mark ergab und dass er voraussichtlich in seinem 50. Jahre einen solchen Ertrag von 700 Mark und ausserdem im 80. Jahre haubar wird, man hierbei einen Ertrag von 6000 Mark erzielt; wie gross

Andeutung. Diese Aufgabe kann man, wie folgt lösen, man kann jedoch auch, wie in der Andeutung der folgenden Aufgabe gezeigt ist, verfahren.

Zur Berechnung des gegenwärtigen Wertes des Waldes, berechne man den baren Wert der sämtlichen Ausgaben, welche der Wald verursacht zur Zeit der Anlegung desselben; dann berechne man für die Zeit der Anlegung des Waldes, den baren Wert der Einnahmen, welche durch den Wald erzielt wurden. Durch Subtraktion dieser gefundenen Werte erhält man den baren Wert des Reinertrags zur Zeit der Anlegung des Waldes; da aber der Wald gegenwärtig 35 Jahre alt ist, so ist

ist alsdann der gegenwärtige Wert des Waldes, wenn dieser Wald in jedem weiteren Umtriebe von 80 Jahren dieselben Einnahmen und Ausgaben, wie in jenem ersten 80jährigen Umtriebe ergeben wird und wenn der Zinsfuss $= 4\frac{1}{2}$ % angenommen wird?

der Jetztwert gleich dem künftigen Wert, welcher jener berechnete bare Wert in dem Zeitraum von 35 Jahren bei $4\frac{1}{2}$ % erreicht.

Den baren Wert der sämtlichen Ausgaben, welche der Wald verursacht, zur Zeit der Anlegung desselben, kann man wie folgt finden:

Die Kulturkosten von je 100 Mark, welche am Anfang eines jeden Umtriebs von 80 Jahren fällig sind, kann man als die Raten einer vorschüssigen ewigen Rente, deren Raten alle 80 Jahre fällig sind, betrachten; nach der Formel 55 hat man somit:

$$\text{barer Wert der Kulturkosten} = \frac{100 \,.\, 1{,}045^{80}}{1{,}045^{80} - 1}$$

Die jährlichen Steuern von je 5,40 Mark, welche am Anfang eines jeden Jahres fällig sind, kann man als die Raten einer vorschüssigen ewigen Jahresrente betrachten; nach der Formel 51 hat man somit:

$$\text{barer Wert d. Steuerausgaben} = \frac{100 \,.\, 5{,}40}{4{,}5} \cdot 1{,}045$$

Man hat somit für den baren Wert sämtlicher Ausgaben für die Zeit der Anlegung:

$$1) \ldots A = \frac{100 \,.\, 1{,}045^{80}}{1{,}045^{80} - 1} + \frac{100 \,.\, 5{,}40}{4{,}5} \cdot 1{,}045$$

Den baren Wert der sämtlichen Einnahmen, welche durch den Wald erzielt werden, findet man, für die Zeit der Anlegung des Waldes, wie folgt:

Die im 25. Jahr eines jeden Umtriebs sich ergebenden Durchforstungserträge von je 580 Mark kann man als die Raten einer um 25 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Rente betrachten, deren Raten alle 80 Jahre fällig sind; nach der Formel 60 hat man somit für den

baren Wert der Durchforstungserträge im 25. Jahre eines jeden Umtriebs:

$$= \frac{580}{1{,}045^{25} \,.\, (1{,}045^{80} - 1)}$$

Die im 50. Jahre eines jeden Umtriebs sich ergebenden Durchforstungserträge von je 700 Mark kann man als die Raten einer um 50 Jahre aufgeschobenen nachschüssigen ewigen Rente betrachten; analog wie vorhin erhält man für den

baren Wert der Durchforstungserträge im 50. Jahre eines jeden Umtriebs:

$$= \frac{700}{1{,}045^{50} \,.\, (1{,}045^{80} - 1)}$$

Die am Ende eines jeden 80. Jahres erzielten Haubarkeitserträge von je 6000 Mark kann man als die Raten einer ewigen nachschüssigen Rente betrachten, deren Raten alle 80 Jahre fällig sind; nach der Formel 54 hat man somit für den

baren Wert der Haubarkeitserträge am Ende eines jeden Umtriebs:

$$= \frac{6000}{1{,}045^{80} - 1}$$

Man hat somit für den baren Wert sämtlicher Einnahmen, für die Zeit der Anlegung:

2). . . $E = \frac{580}{1{,}045^{25}.(1{,}045^{80}-1)} + \frac{700}{1{,}045^{50}.(1{,}045^{80}-1)} + \frac{6000}{1{,}045^{80}-1}$

und hiernach für den baren Wert des Reinertrags R, zur Zeit der Anlegung:

3). . . . $R = E - A$ (siehe vorsteh. Gleich. 1 u. 2)

Für den gesuchten Jetztwert B dieses vor 35 Jahren berechneten Werts des Reinertrags des Waldes ergibt sich hiernach:

4). . . . $B = (E - A) . 1{,}045^{35}$ (siehe vorsteh. Gleich. 1 u. 2)

Aufgabe 515. Ein Buchenholzwalddistrikt im Alter von 65 Jahren wird im 110jährigen Umtriebe bewirtschaftet und gibt während des ersten Turnus

am Ende des 20. Jahres 500 Mark,
" " " 35. " 950 "
" " " 50. " 1100 "
" " " 65. " 1350 "
" " " 90. " 1600 "
" " " 100. " 2600 "

und von da ab bis zum Ende des 1. Umtriebes jährlich 2000 Mark Reinertrag. Was ist der gegenwärtige Wert dieses Waldes, wenn man annehmen kann, dass sich während eines jeden 110jährigen Umtriebes diese Einnahmen wiederholen und wenn der Zinsfuss zu 4% gerechnet wird?

Andeutung. Diese Aufgabe kann man analog wie die vorhergehende lösen, man kann jedoch auch wie folgt verfahren:

Man berechne den Wert der Einnahmen im 1. Umtriebe, für die Zeit zu Ende dieses 1. Umtriebs, bezw. bis zu Ende des 110. Jahres, man findet hiefür:

a). für den Wert der am Ende des 20. Jahres des 1. Umtriebs fälligen Summe von 500 Mark bis zu Ende dieses Umtriebs:
$= 500 . 1{,}04^{110-20} = 500 . 1{,}04^{90}$

b). für den Wert der am Ende des 35. Jahres des 1. Umtriebs fälligen Summe von 950 Mark bis zu Ende dieses Umtriebs:
$= 950 . 1{,}04^{110-35} = 950 . 1{,}04^{75}$

c). für den Wert der am Ende des 50. Jahres des 1. Umtriebs fälligen Summe von 1100 Mark bis zu Ende dieses Umtriebs:
$= 1100 . 1{,}04^{110-50} = 1100 . 1{,}04^{60}$

d). für den Wert der am Ende des 65. Jahres des 1. Umtriebs fälligen Summe von 1350 Mark bis zu Ende dieses Umtriebs:
$= 1350 . 1{,}04^{110-65} = 1350 . 1{,}04^{45}$

e). für den Wert der am Ende des 90. Jahres des 1. Umtriebs fälligen Summe von 1600 Mark bis zu Ende dieses Umtriebs:
$= 1600 . 1{,}04^{110-90} = 1600 . 1{,}04^{20}$

f). für den Wert der am Ende des 100. Jahres des 1. Umtriebs fälligen Summe von 2600 Mark bis zu Ende dieses Umtriebs:
$= 2600 . 1{,}04^{110-100} = 2600 . 1{,}04^{10}$

g). für den Wert der während der letzten 10 Jahre des 1. Umtriebs am Ende jedes dieser 10 Jahren fälligen Summe von 2000 Mark, bis zu Ende dieses Umtriebs, nach der Rentenformel 27:

$$= \frac{2000\,(1{,}04^{110-100}-1)}{0{,}04} = \frac{2000\,(1{,}04^{10}-1)}{0{,}04}$$

Gesetzt nun, man hätte für die Summe der nach a). bis g). zu berechnenden Werte den Zahlenwert A gefunden, so kann man sagen: die am Ende von je weiteren 110 Jahren sich ergebenden Einnahmen von je A bilden eine nachschüssige ewige Jahresrente, deren Raten A alle 110 Jahre fällig sind; man hat somit für den Wert aller folgenden Einnahmen vom Ende des 1. Umtriebs ab, am Ende des 110. Jahres, nach der Formel 54:

$$\frac{A}{1{,}04^{110}-1}$$

am Ende des 110. Jahres beträgt also der Wert aller Einnahmen:

$$= A + \frac{A}{1,04^{110} - 1} \text{ oder } = A\left(1 + \frac{1}{1,04^{110} - 1}\right)$$

Da nun das gegenwärtige Alter des Waldes = 65 Jahre ist, so ist der Wert:

$$A\left(1 + \frac{1}{1,0p^{110} - 1}\right)$$

der Endwert des gesuchten gegenwärtigen Wertes des Waldes nach 110 — 65, also nach 45 Jahren. Für den gegenwärtigen Wert x findet man somit nach der Formel 1[a]:

$$k = \frac{K}{1,0p^n}$$

$$x = A\left(1 + \frac{1}{1,0p^{110} - 1}\right) \cdot \frac{1}{1,0p^{45}}$$

Aufgabe 516. Ein Hochwald im Alter von 50 Jahren wird in 110jährigem Umtriebe bewirtschaftet; welchen baren Wert repräsentiert dieser Wald, wenn man weiss, dass während der ersten Umtriebszeit der Wald folgende Ausgaben:

a). für Kulturkosten jährlich 150 Mark,
b). für Steuern, Hutkosten etc. jährlich 420 Mark,
c). für Unterhaltung der Wege jährlich 70 Mark,
d). für die projektierte Anlage neuer Wege nach je 5 Jahren 360 Mark

verursacht und dass durch denselben während jener Zeit folgende Einnahmen:

a). vom Ende des 15. Jahres bis Ende des 40. Jahres jährlich 1000 ℳ
b). vom Ende des 50. Jahres bis Ende des 70. Jahres jährlich 1400 „
c). vom Ende des 80. Jahres bis Ende des 95. Jahres jährlich 1900 „
d). am Ende des 110. Jahres ein Ertrag von 10000 „

erzielt wurden, und dass diese Einnahmen und Ausgaben bei jedem Umtriebe voraussichtlich wiederkehren und dass der Zinsfuss $4\frac{1}{2}$ % beträgt?

Andeutung. Die Lösung dieser Aufgabe ist analog der vorhergehenden Aufgabe. Man berechne zuerst den Endwert der Ausgaben bis zu Ende des 1. Umtriebs, also bis zu Ende des 110. Jahres und zwar in derselben Weise wie in voriger Aufgabe der Wert jener Einnahmen berechnet wurde. Dieser für die Ausgaben gefundene Endwert sei $= A$.

Da nun während der weiteren Umtriebe dieselben Ausgaben wiederkehren, deren Werte am Ende eines jeden der folgenden Umtriebe je $= A$ sind, so hat man für den gedachten Wert der am Ende von je 110 Jahren ewig wiederkehrenden Ausgaben, für die Zeit des Endes des 1. Umtriebs, nach der Formel 54:

$$\frac{A}{1,045^{110} - 1}$$

somit ist der Wert sämtlicher Ausgaben berechnet für die Zeit des 1. Umtriebs:

$$= A + \frac{A}{1,045^{110} - 1} = A\left(1 + \frac{1}{1,045^{110} - 1}\right)$$

Dann berechne man den Endwert der Einnahmen während des 1. Umtriebs ebenfalls für die Zeit des Endes des 1. Umtriebs und zwar ganz in derselben Weise wie in der vorhergehenden Aufgabe. Dieser für die Einnahmen des 1. Umtriebs gefundene Endwert sei $= B$; da während der weiteren Umtriebe dieselben Einnahmen sich ergeben, deren Werte, berechnet für die Zeit des Endes eines jeden folgenden Umtriebs, je $= B$ sind, so hat man für den Wert der am Ende von je 110 Jahren ewig wiederkehrenden Einnahmen, für die Zeit des Endes des 1. Umtriebs, nach der Formel 54:

$$\frac{B}{1,045^{110} - 1}$$

somit ist der Wert der sämtlichen Einnahmen, berechnet für die Zeit des Endes des 1. Umtriebs:

$$= B + \frac{B}{1{,}045^{110}-1} = B\left(1+\frac{1}{1{,}045^{110}-1}\right)$$

Am Ende des 1. Umtriebs ist hiernach der Wert des Waldes

$$= B\left(1+\frac{1}{1{,}045^{110}-1}\right) - A\left(1+\frac{1}{1{,}045^{110}-1}\right)$$

$$\text{oder} = \left(B-A\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1{,}045^{110}-1}\right)$$

Um hieraus schliesslich den gegenwärtigen Wert des Waldes zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, dass der Wald gegenwärtig nicht 110 Jahre, sondern nur 50 Jahre alt ist, man hat also den baren Wert eines auf $4\frac{1}{2}$% Zinseszinsen ausgeliehenen Kapitals zu suchen, welches in 110 — 50, also in 60 Jahren, zu jener Summe:

$$\left(B-A\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1{,}045^{110}-1}\right)$$

anwächst, nach der Formel 1a:

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

findet man hiernach für den gesuchten Barwert x:

$$x = \left(B-A\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1{,}045^{110}-1}\right)\cdot\frac{1}{1{,}045^{60}}$$

Aufgabe 517. Die auf einem Forste ruhenden jährlichen Ausgaben betragen:

a). für Kulturkosten, Unterhaltung der Wege, Aus- und Anpflanzungen etc. 150 *M.*
b). für Steuern 22 „
c). für Hutkosten und dergleichen . . 316 „

Welches ist der bare Wert dieses Forstes und zwar zur Zeit der Anlage desselben, wenn der Zinsfuss = 4% ist und wenn man in betreff der Einnahmen weiss, dass dieser Forst aus drei Abteilungen besteht, nämlich:

A). aus einem Mittelwalde, dessen Umtriebszeit = 40 Jahre;
B). aus einem Fichtenbestand, dessen Umtriebszeit = 100 Jahre und
C). aus einem Eichenbestand, dessen Umtriebszeit = 160 Jahre ist,

von welcher der unter A). bezeichnete

Mittelwald

folgende Einnahmen:

1). für das Oberholz:
während des 1. Umtriebs jährlich . 110 *M.*
und während jedem weiteren Umtriebe jährlich 160 „
2). für das Unterholz:
während des 1. Umtriebs jährlich 40 *M.*
„ „ 2. „ „ 70 „
„ „ 3. „ „ 80 „

Andeutung. Wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt wurde, hat man zur Lösung dieser Aufgabe zunächst die Summe der Barwerte (zur Zeit der Anlage des Waldes, bezw. zur Zeit des Beginns des 1. Umtriebs) der unter a). bis c). verzeichneten Ausgaben zu bestimmen. Gesetzt, man habe für die Summe dieser 3 Barwerte den Wert A gefunden. Dann hat man die Summe der Barwerte der Einnahmen zu bestimmen, welche der im 40jährigen Umtriebsalter stehende Mittelwald, der im 100jährigen Umtriebsalter stehende Fichtenwald und der im 160jährigen Umtriebsalter stehende Eichenwald ergibt. Gesetzt, man habe für die Summe dieser 18 Barwerte den Wert E gefunden.

Der gesuchte bare Wert x des Waldes zur Zeit des Beginns des 1. Umtriebs ist somit:

$$x = E - A.$$

während des 4. Umtriebs jährlich 95 ℳ
und während jedes weiteren Umtriebs jährlich 100 „

dass der unter B). bezeichnete

Fichtenbestand

folgende Einnahmen:

1). in den 1^{ten} 20 Jahren jährlich . . 130 ℳ
2). „ „ 2^{ten} 20 „ „ . . 155 „
3). „ „ 3^{ten} 20 „ „ . . 200 „
4). „ „ 4^{ten} 20 „ „ . . 240 „
5). „ „ 5^{ten} 20 „ „ . . 260 „
6). in allen folgenden Jahren ebenfalls 260 ℳ

und dass der unter C). bezeichnete

Eichenbestand

folgende Einnahmen:

1). in den 1^{ten} 40 Jahren jährlich . . 350 ℳ
2). „ „ 2^{ten} 40 „ „ . . 420 „
3). „ „ 3^{ten} 40 „ „ . . 475 „
4). „ „ 4^{ten} 40 „ „ . . 500 „
5). in allen folgenden Jahren aber . 530 ℳ

ergibt.

Aufgabe 518. Ein Forstdistrikt, welcher teilweise als Hoch-, teilweise als Niederwald bewirtschaftet wird, ist gegenwärtig 40 Jahre alt; welchen Wert repräsentiert derselbe gegenwärtig, wenn der Zinsfuss $3\frac{1}{2}\%$ beträgt und wenn man in bezug auf die Ausgaben und Einnahmen weiss, dass die

Ausgaben:

1). für Kulturkosten,
während der 1^{ten} 10 Jahre jährlich 180 ℳ
„ „ 2^{ten} 10 „ „ 140 „
und während der folgenden Jahre jährlich 90 „
2). für Erhaltung und Herstellung von Wegen jährlich 200 „
3). für Hutkosten etc. jährlich . . . 220 „
4). für Steuern jährlich 42 „

betragen und dass die

Einnahmen:

a) aus dem Hochwalde

1). während der 1^{ten} 20 Jahre jährl. 1600 ℳ
2). „ „ 2^{ten} 20 „ „ 1800 „
3). „ „ weiter. 30 Jahre „ 2300 „
4). „ allen folgenden „ „ 2750 „

und b) aus dem Niederwalde

1). während der 1^{ten} 15 Jahre jährl. 1000 ℳ
2). „ „ folgend. 10 Jahr. „ 1250 „
3). „ „ weiter. 20 „ „ 1400 „
4). „ allen folgenden „ „ 1600 „

betragen.

Andeutung. Wie in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt ist, hat man zur Lösung dieser Aufgabe den Wert aller Einnahmen, ebenso den Wert aller Ausgaben für die Zeit der Anlage des Waldes zu bestimmen; aus der Differenz D beider erhält man den Wert des Waldes zur Zeit der Anlage desselben. Da aber nach dem gegenwärtigen Wert x des Waldes, also nach dem Werte jener berechneten Differenz D nach 40 Jahren gefragt ist, so muss man den Endwert berechnen, welchen jene Differenz D bei dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ bis zum Ende des 40. Jahres erlangt; man erhält:

$$x = D \cdot 1{,}035^{10}$$

Zur Bestimmung des Wertes der auf dem Walde ruhenden Ausgaben für die Zeit der Anlage des Waldes hat man die Summe der Barwerte der einzelnen Ausgaben für jene Zeit nach den aufgestellten Rentenformeln zu berechnen. Hierbei hat man bei den unter 1). bezeichneten Ausgaben einmal: die Rentenformel für eine nachschüssige Jahresrente, ein andermal die Rentenformel für eine aufgeschobene nachschüssige Jahresrente und das drittemal die Rentenformel für eine aufgeschobene nachschüssige ewige Jahresrente; bei den unter 2)., 3). und 4). bezeichneten Ausgaben die Rentenformel für eine nachschüssige ewige Jahresrente zu benutzen. Dasselbe gilt in analoger Weise für die durch den Wald erzielten Einnahmen.

Anmerkung 15. Weitere ähnliche Aufgaben findet man in Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

7). Mischungsaufgaben.

Aufgabe 519. Aus einem Gefässe, welches a (= 2) Hektoliter Essig enthält, werden b (= 20) Liter abgefüllt und durch Wasser ersetzt. Nachdem sich Wasser und Essig vermischt, werden wieder b (= 20) Liter abgefüllt und ebensoviel Wasser aufgegossen. Wenn die Ab- und Zufüllung im Ganzen n (= 9) mal ausgeführt wird, wie viel Essig ist dann in dem Gefäss zurückgeblieben?

Andeutung. Werden aus dem a Liter Weingeist enthaltenden Gefässe b Liter herausgenommen, so verbleiben in demselben $(a - b)$ Liter Weingeist; werden hierzu 6 Liter Wasser gegossen, so erhält man a Liter Mischung, in welcher $(a - b)$ Liter Weingeist enthalten sind; auf 1 Liter dieser 1. Mischung kommen hiernach $\frac{a-b}{a}$ Liter Weingeist.

Bei der 2. Mischung kommen in analoger Weise auf 1 Liter dieser 2. Mischung $\frac{a-b}{a}$ Liter der 1. Mischung, da aber in 1 Liter dieser 1. Mischung $\frac{a-b}{a}$ Liter Weingeist enthalten sind, so sind in $\frac{a-b}{a}$ Liter der 2. Mischung $\frac{a-b}{a} \cdot \frac{a-b}{a} = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$ Liter Weingeist enthalten, somit sind auch in 1 Liter der 2. Mischung $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$ Liter Weingeist enthalten.

In analoger Weise findet man, dass in 1 Liter der 3., 4., . . . n^{ten} Mischung bezw.

$$\left(\frac{a-b}{a}\right)^3, \left(\frac{a-b}{a}\right)^4 \ldots \left(\frac{a-b}{a}\right)^n \text{ Liter}$$

Weingeist enthalten ist.

In a Liter der n^{ten} Mischung sind also

$$a \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^n \text{ Liter Weingeist enthalten.}$$

Für das gegebene Zahlenbeispiel ergibt sich hiernach (2 Hektoliter = 200 Liter gesetzt), dass in der 9. Mischung:

$$= 200 \cdot \left(\frac{200-20}{200}\right)^9 \text{ oder } = 77{,}48 \text{ Liter}$$

enthalten sind.

Aufgabe 520. Aus einem Gefässe, welches a (= 20) Liter reinen Weingeist enthält, werden b (= 3) Liter herausgenommen und durch b (= 3) Liter Wasser ersetzt. Nachdem das Wasser mit dem Weingeist sich vermischt, werden zum 2. Male b (= 3) Liter der Flüssigkeit herausgenommen und wieder b (= 3) Liter Wasser hinzugegossen. Wenn nun das Wegnehmen und Zugiessen n (= 24) mal hinter einander fortgesetzt wird, wie viel bleibt von der ursprünglichen Flüssigkeit im Gefässe zurück?

Andeutung. Analog der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 521. Mit $a\,(=80)$ gr Silber werden $b\,(=25)$ gr Kupfer zusammengeschmolzen. Von der Mischung werden $b\,(=25)$ gr weggenommen und durch $b\,(=25)$ gr Kupfer ersetzt. Wie viel Silber wird zuletzt noch in dem Gemische enthalten sein, wenn man dieses Verfahren $n\,(=20)$ mal hintereinander wiederholt?

Andeutung. Nach der 1. Zusammenschmelzung erhält man eine Mischung von $(a+b)$ Gramm, in welcher a Gramm Silber enthalten sind; auf 1 Gramm der Mischung kommt hiernach $\frac{a}{a+b}$ Gramm Silber.

In analoger Weise wie in der Aufgabe 519 ergibt sich, dass auf 1 Gramm der n^{ten} Zusammenschmelzung $\left(\frac{a}{a+b}\right)^n$ Gramm, und somit auf $(a+b-b)$ oder auf a Gramm der letzten Mischung:

$$a\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^n \text{ Gramm Silber kommen.}$$

Aufgabe 522. Ein Tabakfabrikant hat zweierlei Sorten Tabak; von der einen Sorte kostet das kg 1 Mark, von der andern 40 pf. Aus beiden Sorten will er 11 Mittelsorten durch Vermengung derselben herstellen. Er mischt zu diesem Zweck 9 Teile der guten Sorte mit 3 Teilen der schlechten, hierauf wieder 9 Teile der hiernach erhaltenen 1. Mittelsorte mit 3 Teilen der schlechten Sorte und so fort 10 mal hinter einander. Welches ist der Preis einer jeden der 10 Mittelsorten?

Andeutung. Der Preis für 1 kg der ersten Mittelsorte ist, da er 9 kg der besseren Sorte mit 3 kg der schlechten Sorte vermengt, und unter Berücksichtigung, dass 1 Mark = 100 pf. ist:

$$=\frac{9\,.\,100+3\,.\,40}{12} \text{ oder } =\frac{9}{12}\cdot 100+\frac{3\,.\,40}{12}$$

In analoger Weise findet man für den Preis der 2. Mittelsorte:

$$=\frac{9\cdot\left(\frac{9}{12}\cdot 100+\frac{3\,.\,40}{12}\right)+3\,.\,40}{11}$$

$$=\frac{\frac{9^2}{12}\cdot 100+\frac{3\,.\,40\,.\,9}{12}+3\,.\,40}{12}$$

$$=\frac{9^2}{2^2}\cdot 100+\frac{3\,.\,40\,.\,9}{12^2}+\frac{3\,.\,40}{12}$$

oder:

$$=\left(\frac{9}{12}\right)^2\cdot 100+\frac{3\,.\,40}{12}\cdot\left(\frac{9}{12}+1\right)$$

Ebenso erhält man für den Preis der 3. Mittelsorte:

$$=\frac{9\cdot\left[\left(\frac{9}{12}\right)^2\cdot 100+\frac{3\,.\,40}{12}\cdot\left(\frac{9}{12}+1\right)\right]+3\,.\,40}{10}$$

oder nach gehöriger Reduktion, wie vorhin:

$$=\left(\frac{9}{12}\right)^3\cdot 100+\frac{3\,.\,40}{12}\cdot\left[\left(\frac{9}{12}\right)^2+\frac{9}{12}+1\right]$$

Hieraus lässt sich schon das Bildungsgesetz erkennen, nach welchem der Preis der aufeinanderfolgenden Mittelsorten zu berechnen ist. Man erhält hiernach z. B. für die 10. Mittelsorte:

$$=\left(\frac{9}{12}\right)^{10}\cdot 100+\frac{3\,.\,40}{12}\cdot\left[\left(\frac{9}{12}\right)^9+\left(\frac{9}{12}\right)^8+\left(\frac{9}{12}\right)^7+\ldots 1\right]$$

Aufgabe 523. In einem Gefäss befinden sich 180 Liter Weingeist. Eine bestimmte Menge Wasser wird hinzugesetzt und mit dem Weingeiste vermischt, dann ebensoviel aus der Mischung geschöpft, als vorhin Wasser zugesetzt wurde. Wenn diese Operation 25 mal hintereinander vollzogen wird und zuletzt nur noch der 113. Teil des ursprüngl. Weingeistes übrig bleibt, wieviel Liter Wasser wurden jedesmal zugesetzt?

Andeutung. Analog wie in den Aufgaben 519 und 520 erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$180 \cdot \left(\frac{180}{180+x}\right)^{25} = \frac{180}{113}$$

Aufgabe 524. 278 kg blauer Farbe werden mit 213 kg gelber Farbe vermischt; 278 kg der Mischung werden hierauf zum 2. Mal mit 213 kg gelber Farbe vermischt u. s. f. Wie oftmals muss die Mischung vorgenommen werden, wenn zuletzt nur der 100. Teil der blauen Farbe in der Mischung übrig bleiben soll?

Aufgabe 525. Verdünnter Weingeist, welcher in einem Liter c Liter wasserfreien Weingeistes enthält, wird n mal hintereinander mit einer p fachen Quantität eines andern Weingeistes ersetzt, welcher in einem Liter a Liter wasserfreien Weingeistes enthält. Wie viel wasserfreier Weingeist ist in einem Liter der letzten Mischung enthalten?

Andeutung. Versetzt man 1 Liter des wasserfreien Weingeistes mit p Liter des andern Weingeistes, so erhält man eine 1. Mischung von $(1+p)$ Liter, da in diesen $(1+p)$ Liter der Aufgabe gemäss $(c+a.p)$ Liter wasserfreier Weingeist enthalten ist, so enthält 1 Liter der 1. Mischung $= \frac{c+a.p}{1+p}$ Lit. wasserfr. Weingeist.

Da nun 1 Liter dieser 1. Mischung wiederum mit p Liter des zweiten Weingeistes versetzt wird, so ergibt sich in analoger Weise, dass in $(1+p)$ Liter der 2. Mischung $\frac{c+ap}{1+p} + ap$ also in 1 Liter dieser 2. Mischung:

$$= \frac{c+ap}{(1+p)^2} + \frac{ap}{1+p}$$ Liter wasserfreien Weingeistes enthalten ist.

In analoger Weise ergibt sich, dass in 1 Liter der 3. Mischung:

$$= \frac{c+a.p}{(1+p)^3} + \frac{ap}{(1+p)^2} + \frac{ap}{1+p} \text{ u. s. f.,}$$

also in 1 Liter der n^{ten} Mischung:

$$= \frac{c+a.p}{(1+p)^n} + \frac{ap}{(1+p)^{n-1}} + \frac{ap}{(1+p)^{n-2}} + \cdots \frac{ap}{1+p}$$

Liter wasserfreien Weingeistes enthalten ist.

Berücksichtigt man, dass die Summanden vom 2. ab eine geometrische Reihe bilden, so erhält man nach Summation derselben, dass in 1 Liter der letzten Mischung:

$$= a + \frac{c-a}{(1+p)^n}$$ Liter wasserfreien Weingeistes enthalten sind.

Anmerkung 16. Weitere praktische Aufgaben, welche sich auf die Zinseszins- und Rentenrechnung beziehen, findet man in Kleyers Lehrbüchern, welche speziell über die Leibrenten und die verschiedenen Teile des Versicherungswesens handeln.

B. Hülfstafeln.

Hülfstafel I

enthaltend

die künftigen Werte der Geldeinheit bei p % nach 1 bis 100 Jahren,

oder enthaltend

die natürlichen Werte von $1{,}0p^n$ oder von $\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n$

für

$p = 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}\ 3\frac{3}{4}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 6$

und für

$n = 1$ bis incl. 100.

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $1{,}01^n$	$1{,}02^n$	$1{,}025^n$	$1{,}03^n$	$1{,}035^n$
1	1,010 0000	1,020 0000	1,025 0000	1,030 0000	1,035 0000
2	1,020 1000	1,040 4000	1,050 6250	1,060 9000	1,071 2250
3	1,030 3010	1,061 2080	1,076 8906	1,092 7270	1,108 7178
4	1,040 6041	1,082 4321	1,103 8128	1,125 5088	1,147 5230
5	1,051 0101	1,104 0808	1,131 4082	1,159 2740	1,187 6863
6	1,061 5202	1,126 1624	1,159 6934	1,194 0523	1,229 2553
7	1,072 1354	1,148 6856	1,188 6857	1,229 8738	1,272 2792
8	1,082 8567	1,171 6593	1,218 4029	1,266 7700	1,316 8090
9	1,093 6853	1,195 0925	1,248 8629	1,304 7731	1,362 8973
10	1,104 6221	1,218 9944	1,280 0845	1,343 9163	1,410 5987
11	1,115 6684	1,243 3743	1,312 0866	1,384 2338	1,459 9697
12	1,126 8250	1,268 2417	1,344 8888	1,425 7608	1,511 0686
13	1,138 0933	1,293 6066	1,378 5110	1,468 5337	1,563 9560
14	1,149 4742	1,319 4787	1,412 9738	1,512 5897	1,618 6945
15	1,160 9690	1,345 8683	1,448 2981	1,557 9674	1,675 3488
16	1,172 5786	1,372 7857	1,484 5056	1,604 7064	1,733 9860
17	1,184 3044	1,400 2414	1,521 6182	1,652 8476	1,794 6755
18	1,196 1475	1,428 2462	1,559 6587	1,702 4330	1,857 4892
19	1,208 1090	1,456 8111	1,598 6501	1,753 5060	1,922 5013
20	1,220 1900	1,485 9474	1,638 6164	1,806 1112	1,989 7888
21	1,232 3919	1,515 6663	1,679 5818	1,860 2945	2,059 4314
22	1,244 7159	1,545 9796	1,721 5714	1,916 1034	2,131 5115
23	1,257 1630	1,576 8992	1,764 6106	1,973 5865	2,206 1144
24	1,269 7347	1,608 4372	1,808 7259	2,032 7941	2,283 3284
25	1,282 4320	1,640 6059	1,853 9441	2,093 7779	2,363 2449
26	1,295 2563	1,673 4181	1,900 2927	2,156 5912	2,445 9585
27	1,308 2089	1,706 8864	1,947 8000	2,221 2890	2,531 5671
28	1,321 2910	1,741 0242	1,996 4950	2,287 9276	2,620 1719
29	1,334 5039	1,775 8446	2,046 4073	2,356 5655	2,711 8779
30	1,347 8489	1,811 3615	2,097 5675	2,427 2624	2,806 7937
31	1,361 3274	1,847 5888	2,150 0067	2,500 0803	2,905 0314
32	1,374 9407	1,884 5405	2,203 7569	2,575 0827	3,006 7075
33	1,388 6901	1,922 2314	2,258 8508	2,652 3352	3,111 9423
34	1,402 5770	1,960 6760	2,315 3221	2,731 9052	3,220 8603
35	1,416 6028	1,999 8895	2,373 2051	2,813 8624	3,333 5904
36	1,430 7689	2,039 8873	2,432 5353	2,898 2783	3,450 2661
37	1,445 0765	2,080 6850	2,493 3487	2,985 2266	3,571 0254
38	1,459 5272	2,122 2987	2,555 6824	3,074 7834	3,696 0113
39	1,474 1225	2,164 7447	2,619 5744	3,167 0269	3,825 3717
40	1,488 8637	2,208 0396	2,685 0638	3,262 0377	3,959 2597
41	1,503 7524	2,252 2004	2,752 1904	3,359 8989	4,097 8338
42	1,518 7899	2,297 2444	2,820 9951	3,460 6958	4,241 2579
43	1,533 9778	2,343 1893	2,891 5200	3,564 5167	4,389 7020
44	1,549 3176	2,390 0531	2,963 8080	3,671 4522	4,543 3416
45	1,564 8108	2,437 8542	3,037 9032	3,781 5958	4,702 3585
46	1,580 4589	2,486 6112	3,113 8508	3,895 0437	4,866 9411
47	1,596 2634	2,536 3435	3,191 6971	4,011 8950	5,037 2840
48	1,612 2261	2,587 0703	3,271 4895	4,132 2518	5,213 5889
49	1,628 3483	2,638 8117	3,353 2768	4,256 2194	5,396 0645
50	1,644 6318	2,691 5880	3,437 1087	4,383 9060	5,584 9268

Hülfstafel I

enthaltend

die künftigen Werte der Geldeinheit bei $p^0/_0$ nach 1 bis 100 Jahren,

oder enthaltend

die natürlichen Werte von $1{,}0p^n$ oder von $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$

für

p = **1, 2, $2^1/_2$, 3, $3^1/_2$, $3^3/_4$, 4, $4^1/_2$, 5, 6**

und für

n = **1 bis incl. 100.**

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $1{,}01^n$	$1{,}02^n$	$1{,}025^n$	$1{,}03^n$	$1{,}035^n$
51	1,661 0781	2,745 4197	3,523 0364	4,515 4232	5,780 3993
52	1,677 6889	2,800 3281	3,611 1123	4,650 8859	5,982 7132
53	1,694 4658	2,856 3347	3,701 3901	4,790 4124	6,192 1082
54	1,711 4105	2,913 4614	3,793 9249	4,934 1248	6,408 8320
55	1,728 5246	2,971 7306	3,888 7730	5,082 1485	6,633 1411
56	1,745 8098	3,031 1652	3,985 9923	5,234 6130	6,865 3010
57	1,763 2679	3,091 7885	4,085 6421	5,391 6514	7,105 5866
58	1,780 9006	3,153 6243	4,187 7832	5,553 4009	7,354 2821
59	1,798 7096	3,216 6968	4,292 4778	5,720 0030	7,611 6820
60	1,816 6967	3,281 0307	4,399 7897	5,891 6031	7,878 0909
61	1,834 8637	3,346 6514	4,509 7844	6,068 3512	8,153 8240
62	1,853 2123	3,413 5844	4,622 5291	6,250 4017	8,439 2079
63	1,871 7444	3,481 8561	4,738 0923	6,437 9137	8,734 5802
64	1,890 4619	3,551 4932	4,856 5446	6,631 0512	8,040 2905
65	1,909 3665	3,622 5231	4,977 9582	6,829 9827	9,356 7006
66	1,928 4602	3,694 9735	5,102 4072	7,034 8822	9,684 1852
67	1,947 7448	3,768 8730	5,229 9673	7,245 9286	10,023 1316
68	1,967 2222	3,844 2505	5,360 7165	7,463 3065	10,373 9412
69	1,986 8944	3,921 1355	5,494 7344	7,687 2057	10,737 0292
70	2,006 7634	3,999 5582	5,632 1028	7,917 8219	11,112 8252
71	2,026 8310	4,079 5493	5,772 9054	8,155 3565	11,501 7741
72	2,047 0993	4,161 1403	5,917 2280	8,400 0172	11,904 3362
73	2,067 5703	4,244 3631	6,065 1587	8,652 0177	12,320 9880
74	2,088 2460	4,329 2504	6,216 7877	8,911 5783	12,752 2225
75	2,109 1285	4,415 8354	6,372 2074	9,178 9256	13,198 5503
76	2,130 2198	4,504 1521	6,531 5126	9,454 2934	13,660 4996
77	2,151 5220	4,594 2352	6,694 8004	9,737 9222	14,138 6171
78	2,173 0372	4,686 1199	6,862 1704	10,030 0599	14,633 4687
79	2,194 7675	4,779 8423	7,033 7247	10,330 9617	15,145 6401
80	2,216 7152	4,875 4391	7,209 5678	10,640 8905	15,675 7375
81	2,238 8824	4,972 9479	7,389 8070	10,960 1172	16,224 3883
82	2,261 2712	5,072 4069	7,574 5521	11,288 9207	16,792 2419
83	2,283 8839	5,173 8550	7,763 9159	11,627 5884	17,379 9704
84	2,306 7228	5,277 3321	7,958 0138	11,976 4160	17,988 2693
85	2,329 7900	5,382 8787	8,156 9642	12,335 7085	18,617 8588
86	2,353 0879	5,490 5363	8,360 8883	12,705 7798	19,269 4838
87	2,376 6188	5,600 3470	8,569 9105	13,086 9532	19,943 9158
88	2,400 3850	5,712 3540	8,784 1583	13,479 5618	20,641 9528
89	2,424 3888	5,826 6011	9,003 7622	13,883 9486	21,364 4212
90	2,448 6327	5,943 1331	9,228 8563	14,300 4671	22,112 1759
91	2,473 1190	6,061 9957	9,459 5777	14,729 4811	22,886 1021
92	2,497 8502	6,183 2357	9,696 0671	15,171 3655	23,687 1156
93	2,522 8287	6,306 9004	9,938 4688	15,626 5065	24,516 1647
94	2,548 0570	6,433 0384	10,186 9305	16,095 3017	25,374 2304
95	2,573 5376	6,561 6991	10,441 6038	16,578 1607	26,262 3285
96	2,599 2729	6,692 9331	10,702 6439	17,075 5055	27,181 5100
97	2,625 2657	6,826 7918	10,970 2100	17,587 7707	28,132 8629
98	2,651 5183	6,963 3276	11,244 4652	18,115 4038	29,117 5131
99	2,678 0335	7,102 5942	11,525 5769	18,658 8660	30,136 6260
100	2,704 8138	7,244 6461	11,813 7163	19,218 6319	31,191 4079

Hülfstafel I

enthaltend

die künftigen Werte der Geldeinheit bei $p\,^0/_0$ nach 1 bis 100 Jahren,

oder enthaltend

die natürlichen Werte von $1{,}0p^n$ oder von $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$

für

$p = 1,\ 2,\ 2^1/_2,\ 3,\ 3^1/_2,\ 3^3/_4,\ 4,\ 4^1/_2,\ 5,\ 6$

und für

$n = 1$ bis incl. 100.

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $1{,}0375^n$	$1{,}04^n$	$1{,}045^n$	$1{,}05^n$	$1{,}06^n$
1	1,037 5000	1,040 0000	1,045 0000	1,050 0000	1,060 0000
2	1,076 4062	1,081 6000	1,092 0250	1,102 5000	1,123 6000
3	1,116 7714	1,124 8640	1,141 1661	1,157 6250	1,191 0160
4	1,158 6504	1,169 8585	1,192 5186	1,215 5062	1,262 4769
5	1,202 0997	1,216 6529	1,246 1819	1,276 2815	1,338 2255
6	1,247 1785	1,265 3190	1,302 2601	1,340 0956	1,418 5191
7	1,293 9476	1,315 9317	1,360 8618	1,407 1004	1,503 6302
8	1,342 4707	1,368 5690	1,422 1006	1,477 4554	1,593 8480
9	1,392 8132	1,423 3118	1,486 0951	1,551 3282	1,689 4789
10	1,445 0442	1,480 2442	1,552 9694	1,628 8946	1,790 8477
11	1,499 2332	1,539 4540	1,622 8530	1,710 3393	1,898 2985
12	1,555 4538	1,601 0322	1,695 8814	1,795 8563	2,012 1964
13	1,613 7844	1,665 0735	1,772 1961	1,885 6491	2,132 9282
14	1,674 3008	1,731 6764	1,851 9449	1,979 9316	2,260 9039
15	1,737 0872	1,800 9435	1,935 2824	2,078 9281	2,396 5581
16	1,802 2279	1,872 9812	2,022 3701	2,182 8745	2,540 3516
17	1,869 8107	1,947 9005	2,113 3768	2,292 0183	2,692 7727
18	1,939 9294	2,025 8165	2,208 4787	2,406 6192	2,854 3391
19	2,012 6768	2,106 8491	2,307 8603	2,526 9502	3,025 5995
20	2,088 1519	2,191 1231	2,411 7140	2,653 2977	3,207 1354
21	2,166 4578	2,278 7680	2,520 2411	2,785 9625	3,399 5636
22	2,247 7000	2,369 9187	2,633 6520	2,925 2607	3,603 5374
23	2,331 9888	2,464 7155	2,752 1663	3,071 5237	3,819 7496
24	2,419 4380	2,563 3041	2,876 0138	3,225 0999	4,048 9346
25	2,510 1670	2,665 8363	3,005 4344	3,386 3549	4,291 8707
26	2,604 2982	2,772 4697	3,140 6790	3,555 6726	4,549 3829
27	2,701 9595	2,883 3685	3,282 0095	3,733 4563	4,822 3459
28	2,803 2832	2,998 7033	3,429 6999	3,920 1291	5,111 6866
29	2,908 4061	3,118 6514	3,584 0364	4,116 1356	5,418 3879
30	3,017 4715	3,243 3975	3,745 3181	4,321 9423	5,743 4911
31	3,130 6275	3,373 1334	3,913 8574	4,538 0394	6,088 1006
32	3,248 0254	3,508 0587	4,089 9810	4,764 9414	6,453 3866
33	3,369 8256	3,648 3811	4,274 0301	5,003 1885	6,840 5898
34	3,496 1944	3,794 3163	4,466 3615	5,253 3479	7,251 0252
35	3,627 3016	3,946 0889	4,667 3478	5,516 0153	7,686 0867
36	3,763 3259	4,103 9325	4,887 3784	5,791 8161	8,147 2520
37	3,904 4504	4,268 0898	5,096 8604	6,081 4069	8,636 0871
38	4,050 8672	4,438 8134	5,326 2192	6,385 4772	9,154 2523
39	4,202 7747	4,616 3659	5,565 8990	6,704 7511	9,703 5074
40	4,360 3788	4,801 0206	5,816 3645	7,039 9887	10,285 7179
41	4,523 8928	4,993 0614	6,078 1009	7,391 9881	10,902 8610
42	4,693 5388	5,192 7839	6,351 6154	7,761 5875	11,557 0326
43	4,869 5461	5,400 4952	6,637 4381	8,149 6669	12,250 4546
44	5,052 1547	5,616 5150	6,936 1229	8,557 1502	12,985 4819
45	5,241 6098	5,841 1756	7,248 2484	8,985 0077	13,764 6108
46	5,438 1700	6,074 8227	7,574 4196	9,434 2581	14,590 4874
47	5,642 1025	6,317 8156	7,915 2684	9,905 9710	15,465 9167
48	5,853 6814	6,570 5282	8,271 4555	10,401 2696	16,393 8717
49	6,073 1944	6,833 3493	8,643 6710	10,921 3331	17,377 5040
50	6,300 9390	7,106 6833	9,032 6362	11,467 3997	18,420 1542

Hülfstafel I

enthaltend

die künftigen Werte der Geldeinheit bei $p\,^0/_0$ nach 1 bis 100 Jahren,

oder enthaltend

die natürlichen Werte von $1{,}0p^n$ oder von $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$

für

$p = 1,\ 2,\ 2^1/_2,\ 3,\ 3^1/_2,\ 3^3/_4,\ 4,\ 4^1/_2,\ 5,\ 6$

und für

$n = 1$ bis incl. 100.

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $1{,}0375^n$	$1{,}04^n$	$1{,}045^n$	$1{,}05^n$	$1{,}06^n$
51	6,537 2242	7,390 9506	9,439 1049	12,040 7697	19,525 3635
52	6,782 3703	7,686 5887	9,863 8646	12,642 8082	20,696 8853
53	7,036 7096	7,994 0522	10,307 7385	13,274 9486	21,938 6984
54	7,300 5850	8,313 8143	10,771 5867	13,938 6961	23,255 0203
55	7,574 3579	8,646 3669	11,256 3081	14,635 6309	24,650 3215
56	7,858 3963	8,992 2216	11,762 8420	15,367 4124	26,129 3408
57	8,153 0856	9,351 9104	12,292 1699	16,135 7830	27,697 1013
58	8,458 8255	9,725 9868	12,845 3175	16,942 5722	29,358 9274
59	8,776 0321	10,115 0263	13,423 3568	17,789 7008	31,120 4630
60	9,105 1335	10,519 6274	14,027 4079	18,679 1858	32,987 6908
61	9,446 5761	10,940 4125	14,658 6412	19,613 1451	34,966 9523
62	9,800 8226	11,378 0290	15,318 2801	20,593 8024	37,064 9694
63	10,168 3536	11,833 1501	16,007 6027	21,623 4925	39,288 8676
64	10,549 6659	12,306 4761	16,727 9448	22,704 6672	41,646 1996
65	10,945 2795	12,798 7352	17,480 7023	23,839 9005	44,144 9716
66	11,355 7277	13,310 6846	18,267 3340	25,031 8955	46,793 6699
67	11,781 5674	13,843 1120	19,089 3640	26,283 4903	49,601 2901
68	12,223 3768	14,396 8364	19,948 3854	27,597 6648	52,577 3675
69	12,681 7524	14,972 7099	20,846 0627	28,977 5481	55,732 0096
70	13,157 3182	15,571 6183	21,784 1355	30,426 4255	59,075 9301
71	13,650 7179	16,194 4830	22,764 4216	31,947 7468	62,620 4859
72	14,162 6195	16,842 2624	23,788 8206	33,545 1341	66,377 7151
73	14,693 7185	17,515 9529	24,859 3175	35,222 3908	70,360 3780
74	15,244 7334	18,216 5910	25,977 9868	36,983 5104	74,582 0007
75	15,816 4098	18,945 2546	27,146 9962	38,832 6859	79,056 9207
76	16,409 5246	19,703 0648	28,368 6111	40,774 3202	83,800 3360
77	17,024 8824	20,491 1874	29,645 1986	42,813 0362	88,828 3561
78	17,663 3156	21,310 8349	30,979 2325	44,953 6880	94,158 0575
79	18,325 6898	22,163 2683	32,373 2980	47,201 3724	99,807 5410
80	19,012 9034	23,049 7990	33,830 0964	49,561 4410	105,795 9934
81	19,725 8868	23,971 7910	35,352 4507	52,039 5131	112,143 7530
82	20,465 6076	24,930 6626	36,943 3110	54,641 4887	118,872 3782
83	21,233 0675	25,927 8891	38,605 7600	57,373 5632	126,004 7209
84	22,029 3087	26,965 0047	40,343 0192	60,242 2413	133,565 0042
85	22,855 4074	28,043 6049	42,158 4551	63,254 3534	141,578 9044
86	23,712 4857	29,165 3491	44,055 5856	66,417 0711	150,073 6387
87	24,601 7036	30,331 9631	46,038 0869	69,737 9246	159,078 0570
88	25,524 2678	31,545 2416	48,109 8008	73,224 8209	168,622 7405
89	26,481 4273	32,807 0512	50,274 7419	76,886 0619	178,740 1049
90	27,474 4809	34,119 3333	52,537 1052	80,730 3650	189,464 5112
91	28,504 7738	35,484 1066	54,901 2750	84,766 8833	200,832 3819
92	29,573 7019	36,903 4709	57,371 8324	89,005 2274	212,882 3248
93	30,682 7164	38,379 6097	59,953 5648	93,455 4888	225,655 2643
94	31,833 3176	39,914 7941	62,651 4752	98,128 2632	239,194 5801
95	33,027 0672	41,511 3859	65,470 7916	103,034 6764	253,546 2549
96	34,265 5827	43,171 8413	68,416 9773	108,186 4102	268,759 0302
97	35,550 5419	44,898 7150	71,495 7412	113,595 7307	284,884 5720
98	36,883 6867	46,694 6636	74,713 0496	119,275 5173	301,977 6464
99	38,266 8251	48,562 4501	78,075 1368	125,239 2931	320,096 3052
100	39,701 8305	50,504 9481	81,588 5180	131,501 2578	339,302 0835

Hülfstafel II

enthaltend

die Briggs'schen Logarithmen der am häufigsten vorkommenden Zinsfaktoren und zwar bis auf 10 Dezimalstellen genau.

Anmerkung. Unter Zinsfaktor versteht man den Wert der Geldeinheit bei $p\,^0/_0$ nach Ablauf eines Jahres; derselbe ist allgemein $= \frac{100+p}{100}$ oder $= 1{,}0p$.

wenn für p gesetzt wird:	Werte des Zinsfaktors: $\frac{100+p}{100} = 1{,}0p$	Briggs'sche Logarithmen der nebenstehenden Zinsfaktoren bis auf 10 Dezimalstellen genau.
$^1/_2 = 0{,}5$	1,005	0,002 1660 618
1	1,01	0,004 3213 738
$1^1/_4 = 1{,}25$	1,0125	0,005 3950 319
$1^1/_2 = 1{,}5$	1,015	0,006 4660 422
$1^5/_8 = 1{,}625$	1,01625	0,007 0005 586
$1^3/_4 = 1{,}75$	1,0175	0,007 5344 179
$1^7/_8 = 1{,}875$	1,01875	0,008 0676 217
2	1,02	0,008 6001 718
$2^1/_8 = 2{,}125$	1,02125	0,009 1320 695
$2^1/_4 = 2{,}25$	1,0225	0,009 6633 167
$2^3/_8 = 2{,}375$	1,02375	0,010 1939 148
$2^1/_2 = 2{,}5$	1,025	0,010 7238 654
$2^5/_8 = 2{,}625$	1,02625	0,011 2531 701
$2^3/_4 = 2{,}75$	1,0275	0,011 7818 305
$2^7/_8 = 2{,}875$	1,02875	0,012 3098 482
3	1,03	0,012 8372 247
$3^1/_8 = 3{,}125$	1,03125	0,012 8372 247
$3^1/_4 = 3{,}25$	1,0325	0,013 8900 603
$3^3/_8 = 3{,}375$	1,03375	0,014 4155 226
$3^1/_2 = 3{,}5$	1,035	0,014 9403 498
$3^5/_8 = 3{,}625$	1,03625	0,015 4645 436
$3^3/_4 = 3{,}75$	1,0375	0,015 9881 054
$3^7/_8 = 3{,}875$	1,03875	0,016 5110 368
4	1,04	0,017 0333 393
$4^1/_8 = 4{,}125$	1,04125	0,017 5550 144
$4^1/_4 = 4{,}25$	1,0425	0,018 0760 636
$4^3/_8 = 4{,}375$	1,04375	0,018 5964 885
$4^1/_2 = 4{,}5$	1,045	0,019 1162 904
$4^5/_8 = 4{,}625$	1,04625	0,019 6354 710
$4^3/_4 = 4{,}75$	1,0475	0,020 1540 316
$4^7/_8 = 4{,}875$	1,04875	0,020 6719 738
5	1,05	0,021 1892 991
$5^1/_8 = 5{,}125$	1,05125	0,021 7060 088
$5^1/_4 = 5{,}25$	1,525	0,022 2221 045
$5^3/_8 = 5{,}4375$	1,05375	0,022 7375 876
$5^1/_2 = 5{,}5$	1,055	0,023 2524 596
$5^5/_8 = 5{,}625$	1,05625	0,023 7667 220
$5^3/_4 = 5{,}75$	1,0575	0,024 2803 760
$5^7/_8 = 5{,}875$	1,05875	0,024 7934 233
6	1,06	0,025 3058 653
$6^1/_4 = 6{,}25$	1,0625	0,026 3289 387
$6^1/_2 = 6{,}5$	1,065	0,027 3496 078
$6^3/_4 = 6{,}75$	1,0675	0,028 3678 837
7	1,07	0,029 3837 777
$7^1/_2 = 7{,}5$	1,075	0,031 4084 643
8	1,08	0,033 4237 555
9	1,09	0,037 4264 979
10	1,10	0,041 3926 852
12	1,12	0,049 2180 227

Hülfstafel III. — Diskontierungstabelle

enthaltend

die baren Werte der Geldeinheit, welche bezw. nach 1 bis 100 Jahren mit p % Zinseszinsen zahlbar ist,

oder: enthaltend die natürlichen Werte von $\frac{1}{1{,}0p^n}$

für $p = 1, 2, 2^1/_2, 3, 3^1/_2, 3^3/_4, 4, 4^1/_2, 5, 6$

und für $n = 1$ bis incl. 100.

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $\frac{1}{1{,}01^n}$	$\frac{1}{1{,}02^n}$	$\frac{1}{1{,}025^n}$	$\frac{1}{1{,}03^n}$	$\frac{1}{1{,}035^n}$
1	0,990 0990	0,980 3922	0,975 6098	0,970 8738	0,966 1836
2	0,980 2960	0,961 1688	0,951 8144	0,942 5959	0,933 5107
3	0,970 5901	0,942 3223	0,928 5994	0,915 1417	0,901 9427
4	0,960 9803	0,923 8454	0,905 9506	0,888 4870	0,871 4422
5	0,951 4657	0,905 7308	0,883 8543	0,862 6088	0,841 9732
6	0,942 0452	0,887 9714	0,862 2969	0,837 4843	0,813 5006
7	0,932 7181	0,870 5602	0,841 2652	0,813 0915	0,785 9910
8	0,923 4832	0,853 4904	0,820 7466	0,789 4092	0,759 4116
9	0,914 3398	0,836 7553	0,800 7284	0,766 4167	0,733 7310
10	0,905 2870	0,820 3483	0,781 1984	0,744 0939	0,708 9188
11	0,896 3237	0,804 2630	0,762 1448	0,722 4213	0,684 9457
12	0,887 4492	0,788 4932	0,743 5559	0,701 3799	0,661 7833
13	0,878 6626	0,773 0325	0,725 4204	0,680 9513	0,639 4042
14	0,869 9630	0,757 8750	0,707 7272	0,661 1178	0,617 7818
15	0,861 3495	0,743 0147	0,690 4656	0,641 8619	0,596 8906
16	0,852 8213	0,728 4458	0,673 6249	0,623 1669	0,576 7059
17	0,844 3775	0,714 1626	0,657 1951	0,605 0164	0,557 2038
18	0,836 0173	0,700 1594	0,641 1659	0,587 3946	0,538 3611
19	0,827 7399	0,686 4308	0,625 5277	0,570 2860	0,520 1557
20	0,819 5445	0,672 9713	0,610 2709	0,553 6758	0,502 5659
21	0,811 4302	0,659 7758	0,595 3863	0,537 5493	0,485 5709
22	0,803 3962	0,646 8390	0,580 8647	0,521 8925	0,469 1506
23	0,795 4418	0,634 1559	0,566 6972	0,506 6917	0,453 2856
24	0,787 5661	0,621 7215	0,552 8754	0,491 9337	0,437 9571
25	0,779 7684	0,609 5309	0,539 3906	0,477 6056	0,423 1470
26	0,772 0480	0,597 5793	0,526 2347	0,463 6947	0,408 8377
27	0,764 4039	0,585 8620	0,513 3997	0,450 1891	0,395 0122
28	0,756 8356	0,574 3746	0,500 8778	0,437 0768	0,381 6543
29	0,749 3421	0,563 1123	0,488 6613	0,424 3464	0,368 7482
30	0,741 9229	0,552 0709	0,476 7427	0,411 9868	0,356 2784
31	0,734 5771	0,541 2460	0,465 1148	0,399 9871	0,344 2303
32	0,727 3041	0,530 6333	0,453 7706	0,388 3370	0,332 5897
33	0,720 1031	0,520 2287	0,442 7030	0,377 0262	0,321 3427
34	0,712 9733	0,510 0282	0,431 9053	0,366 0449	0,310 4761
35	0,705 9142	0,500 0276	0,421 3711	0,355 3834	0,299 9769
36	0,698 9249	0,490 2231	0,411 0937	0,345 0324	0,289 8327
37	0,692 0049	0,480 6109	0,401 0670	0,334 9829	0,280 0316
38	0,685 1534	0,471 1872	0,391 2849	0,325 2262	0,270 5619
39	0,678 3697	0,461 9482	0,381 7414	0,315 7535	0,261 4125
40	0,671 6531	0,452 8904	0,372 4306	0,306 5568	0,252 5725
41	0,665 0031	0,444 0102	0,363 3470	0,297 6280	0,244 0314
42	0,658 4189	0,435 3041	0,354 4848	0,288 9592	0,235 7791
43	0,651 8999	0,426 7688	0,345 8389	0,280 5429	0,227 8059
44	0,645 4455	0,418 4007	0,337 4038	0,272 3718	0,220 1023
45	0,639 0549	0,410 1968	0,329 1744	0,264 4386	0,212 6592
46	0,632 7276	0,402 1537	0,321 1458	0,256 7365	0,205 4679
47	0,626 4630	0,394 2684	0,313 3129	0,249 2588	0,198 5197
48	0,620 2604	0,386 5376	0,305 6712	0,241 9988	0,191 8065
49	0,614 1192	0,378 9584	0,298 2158	0,234 9503	0,185 3202
50	0,608 0388	0,371 5279	0,290 9422	0,228 1071	0,179 0534

Hülfstafel III. — Diskontierungstabelle

enthaltend

die baren Werte der Geldeinheit, welche bezw. nach 1 bis 100 Jahren mit $p\,^0/_0$ Zinseszinsen zahlbar ist,

oder: enthaltend die natürlichen Werte von $\frac{1}{1{,}0\,p^n}$

für $p = 1,\ 2,\ 2^1/_2,\ 3,\ 3^1/_2,\ 3^3/_4,\ 4,\ 4^1/_2,\ 5,\ 6$

und für $n = 1$ bis incl. 100.

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $\frac{1}{1{,}01^n}$	$\frac{1}{1{,}02^n}$	$\frac{1}{1{,}025^n}$	$\frac{1}{1{,}03^n}$	$\frac{1}{1{,}035^n}$
51	0,602 0186	0,364 2430	0,283 8461	0,221 4632	0,172 9984
52	0,596 0581	0,357 1010	0,276 9230	0,215 0128	0,167 1482
53	0,590 1565	0,350 0990	0,270 1688	0,208 7503	0,161 4959
54	0,584 3134	0,343 2343	0,263 5793	0,202 6702	0,156 0347
55	0,578 5281	0,336 5042	0,257 1505	0,196 7672	0,150 7581
56	0,572 8001	0,329 9061	0,250 8786	0,191 0361	0,145 6600
57	0,567 1288	0,323 4374	0,244 7596	0,185 4719	0,140 7343
58	0,561 5137	0,317 0955	0,238 7898	0,180 0698	0,135 9752
59	0,555 9541	0,310 8779	0,232 9657	0,174 8251	0,131 3770
60	0,550 4496	0,304 7823	0,227 2836	0,169 7331	0,126 9343
61	0,544 9996	0,298 8061	0,221 7401	0,164 7894	0,122 6418
62	0,539 6036	0,292 9472	0,216 3318	0,159 9897	0,118 4945
63	0,534 2610	0,287 2031	0,211 0554	0,155 3298	0,114 4875
64	0,528 9713	0,281 5717	0,205 9077	0,150 8057	0,110 6159
65	0,523 7339	0,276 0507	0,200 8856	0,146 4133	0,106 8753
66	0,518 5484	0,270 6379	0,195 9859	0,142 1488	0,103 2611
67	0,513 4143	0,265 3313	0,191 2058	0,138 0085	0,099 7692
68	0,508 3310	0,260 1287	0,186 5422	0,133 9889	0,096 3954
69	0,503 2980	0,255 0282	0,181 9924	0,130 0863	0,093 1356
70	0,498 3149	0,250 0276	0,177 5536	0,126 2974	0,089 9861
71	0,493 3810	0,245 1251	0,173 2230	0,122 6188	0,086 9431
72	0,488 4961	0,240 3187	0,168 9980	0,119 0474	0,084 0030
73	0,483 6595	0,235 6066	0,164 8761	0,115 5800	0,081 1623
74	0,478 8708	0,230 9869	0,160 8548	0,112 2136	0,078 4177
75	0,474 1295	0,226 4577	0,156 9315	0,108 9452	0,075 7659
76	0,469 4351	0,222 0174	0,153 1039	0,105 7721	0,073 2038
77	0,464 7873	0,217 6641	0,149 3697	0,102 6913	0,070 7283
78	0,460 1854	0,213 3962	0,145 7265	0,099 7003	0,068 3365
79	0,455 6291	0,209 2119	0,142 1722	0,096 7964	0,066 0256
80	0,451 1179	0,205 1097	0,138 7046	0,093 9771	0,063 7929
81	0,446 6514	0,201 0880	0,135 3215	0,091 2399	0,061 6356
82	0,442 2291	0,197 1451	0,132 0210	0,088 5824	0,059 5513
83	0,437 8506	0,193 2795	0,128 8010	0,086 0024	0,057 5375
84	0,433 5155	0,189 4897	0,125 6595	0,083 4974	0,055 5918
85	0,429 2232	0,185 7742	0,122 5946	0,081 0655	0,053 7119
86	0,424 9735	0,182 1316	0,119 6045	0,078 7043	0,051 8955
87	0,420 7658	0,178 5604	0,116 6873	0,076 4120	0,050 1406
88	0,416 5998	0,175 0592	0,113 8413	0,074 1864	0,048 4450
89	0,412 4751	0,171 6266	0,111 0647	0,072 0256	0,046 8068
90	0,408 3912	0,168 2614	0,108 3558	0,069 9278	0,045 2240
91	0,404 3477	0,164 9622	0,105 7130	0,067 8911	0,043 6946
92	0,400 3443	0,161 7276	0,103 1346	0,065 9136	0,042 2170
93	0,396 3805	0,158 5565	0,100 6191	0,063 9938	0,040 7894
94	0,392 4559	0,155 4475	0,098 1650	0,062 1299	0,039 4101
95	0,388 5702	0,152 3995	0,095 7707	0,060 3203	0,038 0774
96	0,384 7230	0,149 4113	0,093 4349	0,058 5634	0,036 7897
97	0,380 9138	0,146 4817	0,091 1560	0,056 8577	0,035 5456
98	0,377 1424	0,143 6095	0,088 9326	0,055 2016	0,034 3436
99	0,373 4083	0,140 7936	0,086 7636	0,053 5938	0,033 1822
100	0,369 7112	0,138 0330	0,084 6474	0,052 0328	0,032 0601

Hülfstafel III. — Diskontierungstabelle

enthaltend

die baren Werte der Geldeinheit, welche bezw. nach 1 bis 100 Jahren mit p % Zinseszinsen zahlbar ist,

oder: enthaltend **die natürlichen Werte von** $\frac{1}{1{,}0\,p^n}$

für p = **1, 2, 2½, 3, 3½, 3¾, 4, 4½, 5, 6**

und für n = **1** bis incl. **100**.

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $\frac{1}{1{,}0375^n}$	$\frac{1}{1{,}04^n}$	$\frac{1}{1{,}045^n}$	$\frac{1}{1{,}05^n}$	$\frac{1}{1{,}06^n}$
1	0,963 8554	0,961 5385	0,956 9378	0,952 3810	0,943 3962
2	0,929 0173	0,924 5562	0,915 7300	0,907 0295	0,889 9964
3	0,895 4383	0,888 9964	0,876 2966	0,863 8376	0,839 6193
4	0,863 0731	0,854 8042	0,838 5613	0,822 7025	0,792 0937
5	0,831 8777	0,821 9271	0,802 4510	0,783 5262	0,747 2582
6	0,801 8098	0,790 3145	0,767 8957	0,746 2154	0,704 9605
7	0,772 8287	0,759 9178	0,734 8285	0,710 6813	0,665 0571
8	0,744 8952	0,730 6902	0,703 1851	0,676 8394	0,627 4124
9	0,717 9712	0,702 5867	0,672 9044	0,644 6089	0,591 8985
10	0,692 0205	0,675 5642	0,643 9277	0,613 9133	0,558 3948
11	0,667 0077	0,649 5809	0,616 1987	0,584 6793	0,526 7875
12	0,642 8990	0,624 5970	0,589 6639	0,556 8374	0,496 9694
13	0,619 6617	0,600 5741	0,564 2716	0,530 3214	0,468 8390
14	0,597 2643	0,577 4751	0,539 9729	0,505 0680	0,442 3010
15	0,575 6764	0,555 2645	0,516 7204	0,481 0171	0,417 2651
16	0,554 8688	0,533 9082	0,494 4693	0,458 1115	0,393 6463
17	0,534 8133	0,513 3732	0,473 1764	0,436 2967	0,371 3644
18	0,515 4827	0,493 6281	0,452 8004	0,415 5207	0,350 3438
19	0,496 8508	0,474 6424	0,433 3018	0,395 7340	0,330 5130
20	0,478 8923	0,456 3869	0,414 6429	0,376 8895	0,311 8047
21	0,461 5830	0,438 8336	0,396 7874	0,358 9424	0,294 1554
22	0,444 8993	0,421 9554	0,379 7009	0,341 8499	0,277 5051
23	0,428 8186	0,405 7263	0,363 3501	0,325 5713	0,261 7973
24	0,413 3191	0,390 1215	0,347 7035	0,310 0679	0,246 9785
25	0,398 3799	0,375 1168	0,332 7306	0,295 3028	0,232 9986
26	0,383 9806	0,360 6892	0,318 4025	0,281 2407	0,219 8100
27	0,370 1018	0,346 8166	0,304 6914	0,267 8483	0,207 3680
28	0,356 7246	0,333 4775	0,291 5707	0,255 0936	0,195 6301
29	0,343 8309	0,320 6514	0,279 0150	0,242 9463	0,184 5567
30	0,331 4033	0,308 3187	0,267 0000	0,231 3774	0,174 1101
31	0,319 4249	0,296 4603	0,255 5024	0,220 3595	0,164 2548
32	0,307 8794	0,285 0579	0,244 4999	0,209 8662	0,154 9574
33	0,296 7512	0,274 0942	0,233 9712	0,199 8725	0,146 1862
34	0,286 0253	0,263 5521	0,223 8959	0,190 3548	0,137 9115
35	0,275 6870	0,253 4155	0,214 2544	0,181 2903	0,130 1052
36	0,265 7224	0,243 6687	0,205 0282	0,172 6574	0,122 7408
37	0,256 1180	0,234 2968	0,196 1992	0,164 4356	0,115 7932
38	0,246 8607	0,225 2854	0,187 7504	0,156 6054	0,109 2388
39	0,237 9380	0,216 6206	0,179 6655	0,149 1480	0,103 0555
40	0,229 3379	0,208 2890	0,171 9287	0,142 0457	0,097 2222
41	0,221 0486	0,200 2779	0,164 5251	0,135 2816	0,091 7190
42	0,213 0588	0,192 5749	0,157 4403	0,128 8396	0,086 5274
43	0,205 3579	0,185 1682	0,150 6605	0,122 7044	0,081 6296
44	0,197 9353	0,178 0463	0,144 1728	0,116 8613	0,077 0091
45	0,190 7811	0,171 1984	0,137 9644	0,111 2965	0,072 6501
46	0,183 8854	0,164 6139	0,132 0233	0,105 9967	0,068 5378
47	0,177 2389	0,158 2826	0,126 3381	0,100 9492	0,064 6583
48	0,170 8327	0,152 1948	0,120 8977	0,096 1421	0,060 9984
49	0,164 6580	0,146 3411	0,115 6916	0,091 5639	0,057 5457
50	0,158 7065	0,140 7126	0,110 7097	0,087 2037	0,054 2884

Hülfstafel III. — Diskontierungstabelle

enthaltend

die baren Werte der Geldeinheit, welche bezw. nach 1 bis 100 Jahren mit p % Zinseszinsen zahlbar ist,

oder: enthaltend **die natürlichen Werte von $\frac{1}{1,0p^n}$**

für p = **1, 2, 2½, 3, 3½, 3¾, 4, 4½, 5, 6,**

und für n = **1 bis incl. 100.**

wenn für n bezw. gesetzt wird:	Werte für: $\frac{1}{1,0375^n}$	$\frac{1}{1,04^n}$	$\frac{1}{1,045^n}$	$\frac{1}{1,05^n}$	$\frac{1}{1,06^n}$
51	0,152 9701	0,135 3006	0,105 9422	0,083 0512	0,051 2154
52	0,147 4411	0,130 0967	0,101 3801	0,079 0964	0,048 3164
53	0,142 1119	0,125 0930	0,097 0145	0,075 3299	0,045 5816
54	0,136 9753	0,120 2817	0,092 8368	0,071 7427	0,043 0015
55	0,132 0244	0,115 6555	0,088 8391	0,068 3264	0,040 5674
56	0,127 2524	0,111 2072	0,085 0135	0,065 0728	0,038 2712
57	0,122 6529	0,106 9300	0,081 3526	0,061 9741	0,036 1049
58	0,118 2119	0,102 8173	0,077 8494	0,059 0229	0,034 0612
59	0,113 9467	0,098 8628	0,074 4970	0,056 2123	0,032 1332
60	0,109 8282	0,095 0604	0,071 2890	0,053 5355	0,030 3143
61	0,105 8585	0,091 4042	0,068 2191	0,050 9862	0,028 5984
62	0,102 0323	0,087 8887	0,065 2815	0,048 5583	0,026 9797
63	0,098 3443	0,084 5084	0,062 4703	0,046 2460	0,025 4525
64	0,094 7897	0,081 2580	0,059 7802	0,044 0438	0,024 0118
65	0,091 3636	0,078 1327	0,057 2059	0,041 9465	0,022 6526
66	0,088 0613	0,075 1276	0,054 7425	0,039 9490	0,021 3704
67	0,084 8784	0,072 2381	0,052 3852	0,038 0467	0,020 1608
68	0,081 8105	0,069 4597	0,050 1294	0,036 2349	0,019 0196
69	0,078 8535	0,066 7882	0,047 9707	0,034 5095	0,017 9430
70	0,076 0033	0,064 2194	0,045 9050	0,032 8662	0,016 9274
71	0,073 2562	0,061 7494	0,043 9282	0,031 3011	0,015 9692
72	0,070 6084	0,059 3744	0,042 0366	0,029 8106	0,015 0653
73	0,068 0563	0,057 0908	0,040 2264	0,028 3910	0,014 2125
74	0,065 5964	0,054 8950	0,038 4941	0,027 0391	0,013 4081
75	0,063 2255	0,052 7837	0,036 8365	0,025 7515	0,012 6491
76	0,060 9402	0,050 7535	0,035 2502	0,024 5252	0,011 9331
77	0,058 7376	0,048 8015	0,033 7323	0,023 3574	0,011 2577
78	0,056 6145	0,046 9245	0,032 2797	0,022 2451	0,010 6204
79	0,054 5682	0,045 1197	0,030 8897	0,021 1858	0,010 0193
80	0,052 5959	0,043 3843	0,029 5595	0,020 1770	0,009 4522
81	0,050 6948	0,041 7157	0,028 2866	0,019 2162	0,008 9171
82	0,048 8625	0,040 1112	0,027 0685	0,018 3011	0,008 4124
83	0,047 0964	0,038 5685	0,025 9029	0,017 4296	0,007 9362
84	0,045 3941	0,037 0851	0,024 7874	0,016 5996	0,007 4870
85	0,043 7533	0,035 6588	0,023 7200	0,015 8092	0,007 0632
86	0,042 1719	0,034 2873	0,022 6986	0,015 0564	0,006 6634
87	0,040 6476	0,032 9685	0,021 7211	0,014 3394	0,006 2862
88	0,039 1784	0,031 7005	0,020 7858	0,013 6566	0,005 9304
89	0,037 7623	0,030 4813	0,019 8907	0,013 0063	0,005 5947
90	0,036 3974	0,029 3089	0,019 0342	0,012 3869	0,005 2780
91	0,035 0818	0,028 1816	0,018 2145	0,011 7971	0,004 9793
92	0,033 8138	0,027 0977	0,017 4302	0,011 2353	0,004 6974
93	0,032 5916	0,026 0555	0,016 6796	0,010 7003	0,004 4315
94	0,031 4136	0,025 0534	0,015 9613	0,010 1907	0,004 1807
95	0,030 2782	0,024 0898	0,015 2740	0,009 7055	0,003 9441
96	0,029 1838	0,023 1632	0,014 6163	0,009 2433	0,003 7208
97	0,028 1290	0,022 2724	0,013 9868	0,008 8031	0,003 5102
98	0,027 1133	0,021 4157	0,013 3845	0,008 3840	0,003 3115
99	0,026 1323	0,020 5920	0,012 8082	0,007 9847	0,003 1241
100	0,025 1878	0,019 8000	0,012 2566	0,007 6045	0,002 9472

C. Verzeichnis der Formeln,

welche in diesem Buche entwickelt wurden.

Anmerkung. Bei den nachstehenden Formeln, welche mit einem Sternchen * bezeichnet sind, beachte man, dass wenn bei solchen Berechnungen, in welchen diese Formeln zur Anwendung kommen, nicht nach den im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch, sondern nach streng mathematisch richtigen Grundsätzen verfahren werden soll, man an Stelle der Quotienten $\frac{p}{m}$ nach der Formel 21 den sich aus der Gleichung: $p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$ für p_m ergebenden Wert zu substituieren hat (siehe die Erkl. 75 der 2. Aufl., bezw. die Anmerkung 18 in der 1. Aufl.). Hierbei ist zu beachten, dass man sich für die in jenen Formeln vorkommenden Ausdrücke $1{,}0\frac{p}{m} = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$ gesetzt denken muss.

I. Formeln für die Zinseszinsrechnung.

a). Hauptzinseszinsformel.

1). **Formel 1:** $K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ ist entwickelt in Antw. d. Frage 8, bezw. der Frage 7 der 1. Aufl.

2). „ 1ª: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$ „

3). „ 1ᵇ: $K = k \,.\, q^n$ „

b). Zinseszinsformel, wenn sich ein Kapital ver-m-fachen soll.

4). **Formel 2:** $m = 1{,}0p^n$ ist entwickelt in Antw. d. Frage 9, bezw. der Frage 8 der 1. Aufl.

5). „ 2ª: $m = q^n$ „

c). Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten zum Kapital geschlagen werden.

6). ***Formel 3:** $K = k \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}$. . ist entwickelt in Antw. d. Frage 10, bezw. der Frage 9 der 1. Aufl.

7). * „ 3ª: $K = k \,.\, q_1^{m.n}$ „

d). Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt wird.

8). **Formel 4:** $K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwickelt in Antw. der Frage 11, bezw. d. Frage 10 der 1. Aufl.

9). „ 4ª: $K = k \,.\, q^n + \frac{r\,.\,(q^n - 1)}{q-1}$. . . „

10). „ 4ᵇ: $K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$ siehe Erkl. 42, bezw. Anm. 7 der 1. Aufl.

Anmerkungen.

K bedeutet das Endkapital, bezw. den künftigen oder Endwert.
k bedeutet das Anfangskapital, bezw. den ursprünglichen, baren oder gegenwärtigen Wert.
p bedeutet den Zinsfuss, den Prozentsatz.
n bedeut. d. Anzahl d. Jahre.
q „ den Zinsfaktor, d. i. der Wert der Geldeinheit bei p % nach Ablauf eines Jahres $= \frac{100+p}{100} = 1{,}0p$

m bedeut. hier die Zahl, welche angibt, wievielmal das Endkapital K grösser als das Anfangskapital k ist.
Die Bedeutung der übrigen Buchstaben p, q und n ergibt sich aus der vorstehenden Anmerkung.

m bedeutet hier den Jahresbruchteil, nach welchem die Zinsen zum Kapital geschlagen werden.
q_1 bedeut. den Wert der Geldeinheit bei p % nach Ablauf eines $\frac{1}{m}$ Jahres.
Die Bedeutung der übrigen Buchstaben K, k, p und n ergibt sich aus der ersten dieser Anmerkungen.

r bedeutet die am Ende eines jeden Jahres zugelegte Summe.
Die Bedeutung der übrigen Buchstaben K, k, p, n und q ergibt sich aus der ersten dieser Anmerkungen.

e). **Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe auf Zinseszinsen angelegt wird.**

Anmerkungen.

11). **Formel** 5: $K = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwickelt in der Erkl. 46, bezw. in Anm. 9 der 1. Aufl.

12). „ 5a: $K = \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben K, k, r, p, q und n ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.

f). **Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird.**

13). **Formel** 6: $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwickelt in Antw. der Frage 12, bezw. d. Frage 11 der 1. Aufl.

14). „ 6a: $K = k \,.\, q^n - \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$ „

15). „ 6b: $K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$ siehe Erkl. 52, bezw. Anm. 11 der 1. Aufl.)

g). **Zinseszinsformel zur Berechnung des baren Wertes der gleichen Summe r, welche je am Ende eines $\frac{1}{m}$ Jahres fällig ist.**

16). **Formel** 7: $k = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}$ ist entwickelt in der Erkl. 56 der 2. Aufl.

17). „ 7a: $k = \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q^n \,.\, (q - 1)}$

k bedeutet den baren Wert einer zu p % auf Zinseszinsen stehenden Schuld, welche durch am Ende eines jeden Jahres stattfindenden Ratenzahlungen von je r in n Jahren getilgt werden soll.

h). **Zinseszinsformel, wenn am Anfange eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt wird.**

18). **Formel** 8: $K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwickelt in Antw. d Frage 13, bezw. der Frage 12 der 1. Aufl.

19). „ 8a: $K = k \,.\, q^n + \frac{r \,.\, q\,(q^n - 1)}{q - 1}$

20). „ 8b: $K = \left(k + \frac{1{,}0p \,.\, r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n - \frac{1{,}0p \,.\, r}{0{,}0p}$ siehe Erkl. 63, bezw. Anm. 14 der 1. Aufl.

Die Bedeutung der Buchstaben K, k, r, p, q und n ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.

i). **Zinseszinsformel, wenn am Anfange eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird.**

21). **Formel** 9: $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwick. in Antw. der Frage 13, bezw. d. Frage 12 d. 1. Aufl.

22). „ 9a: $K = k \,.\, q^n - \frac{r \,.\, q\,(q^n - 1)}{q - 1}$ „

23). „ 9b: $K = \left(k - \frac{1{,}0p \,.\, r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{1{,}0p \,.\, r}{0{,}0p}$ siehe Erkl. 63, bezw. Anm. 14 der 1. Aufl.

k). **Zinseszinsformel, wenn am Anfange eines jeden Jahres eine gewisse Summe auf Zinseszinsen angelegt wird.**

24). **Formel** 10: $K = \frac{r \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$. . ist entwickelt in der Erkl. 64, bezw. in der Anmerk. 15 der 1. Aufl.

25). „ 10a: $K = \frac{r \,.\, q\,(q^n - 1)}{q - 1}$ „

l). **Zinseszinsformeln, wenn am Ende, bezw. am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird.**

26). *Formel 11: $K = k \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} + \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

27). * „ 12: $K = k \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

. . Diese Formeln sind entwickelt in Antw. der Frage 14, bezw. der Frage 13 der 1. Aufl.

28). * „ 13: $K = k \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} + \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

29). * „ 14: $K = k \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$

Anmerkungen.

Formel 11 bedeutet die Formel, wenn am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres die Summe r zugelegt wird.

Formel 12 bedeutet die Formel, wenn am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres die Summe r weggenommen wird.

Formel 13 bedeutet die Formel, wenn am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres die Summe r zugelegt wird.

Formel 14 bedeutet die Formel, wenn am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres die Summe r weggenommen wird.

An Stelle des Wertes $1{,}0\frac{p}{m}$ hat man sich: $\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$ gesetzt zu denken, in welchem Ausdruck m den Jahresbruchteil bedeutet.

Im übrigen siehe die Anmerkungen zu den früheren Formeln.

m). **Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres eine gewisse Summe auf Zinseszinsen angelegt wird.**

30). *Formel 15: $K = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$. . . ist entwickelt in der Erkl. 68, bezw. in Anm. 17 der 1. Aufl.

n). **Zinseszinsformel zur Berechnung des baren Wertes der gleichen Summen r, welche je am Ende eines $\frac{1}{m}$ Jahres fällig sind.**

31). *Formel 16: $K = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m}}$. . . ist entwickelt in der Erkl. 68 der 2. Aufl.

o). **Zinseszinsformel, wenn am Anfange eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres eine gewisse Summe auf Zinseszinsen angelegt wird.**

32). *Formel 17: $K = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$ ist entwickelt in der Erkl. 68 der 2. Aufl.

Die Bedeutung der Buchstaben und des Wertes $1{,}0\frac{p}{m}$ ist wie in den vorstehenden Anmerkungen angegeben.

p). **Hauptzinseszinsformel für den Fall, dass die Anzahl der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist.**

33). *Formel 18: $K = k \cdot 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$. . ist entwickelt in Antw. der Frage 16, bezw. d. Frage 15 der 1. Aufl.

34). * „ 18a: $K = k \cdot 1{,}0p^n \left(1 + \frac{m_1 \cdot 1{,}0p}{m}\right)$ ist entwickelt in d. Erkl. 75a der 2. Aufl.

m, bezw. $\frac{m_1}{m}$ bedeutet den Bruchteil des letzten Jahres, wie n die Anzahl der ganzen Jahre bedeutet.

Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist, wie in den vorstehenden Anmerkungen, dieselbe.

q). **Einige weitere besondere Formeln.**

Anmerkungen.

a). Formel zur Berechnung des baren Wertes einer verzinsbaren Schuld, welche in jährlichen Raten zu tilgen ist.

35). **Formel 19:** $w = \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}$ ist entwickelt in der Erkl. 84, bezw. in der Anm. 22 der 1. Aufl.

w bedeutet den baren Wert, r die am Ende eines jeden Jahres fällige Summe r, n die Anzahl der Jahre und p den Zinsfuss.

b). Formel zur Berechnung des mittleren Zahlungstermins mehrerer in verschiedenen Zeiten zahlbarer Summen.

36). **Formel 20:** $\frac{A}{1{,}0p^a} + \frac{B}{1{,}0p^b} + \frac{C}{1{,}0p^c} + \cdots = \frac{A + B + C + \cdots}{1{,}0p^t}$ ist entwickelt in der Erkl. 92, bezw. in der Erkl. 40 der 1. Aufl.

A, B, C, . . . bedeuten die bezw. nach a, b, c, . . . Jahren zahlbaren Summen; t bedeutet den mittleren Zahlungstermin, p den Zinsfuss.

c). Formel zur Berechnung des $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsfusses, wenn der jährliche Zinsfuss p gegeben ist, nach mathematisch richtigen Grundsätzen:

37). **Formel 21:** $p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100 + p}{100}} - 1\right)$ ist entwickelt in der Aufgabe 46.

d). Formel zur Berechnung des jährlichen Zinsfusses p, wenn der $\frac{1}{m}$ jährliche Zinsfuss gegeben ist, nach mathematisch richtigen Grundsätzen:

38). **Formel 21a:** $p = 100\left(\frac{100 + p_m}{100}\right)^m - 100$ ist entwickelt in der Aufgabe 47.

p_m bedeutet den $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsfuss, wenn p den jährlichen Zinsfuss bedeutet; m bedeutet den betreffenden Jahresbruchteil.

e). Formel zur Berechnung des Endwerts eines auf Zinseszinsen stehenden Kapitals, dessen jährliche Zinsen zu einem niedrigeren Zinsfuss als das Kapital selbst verzinst werden.

39). **Formel 22:** $K = k\,.\left(1 + \frac{P}{p}\,(1{,}0p^n - 1)\right)$ ist entwickelt in der Aufgabe 76.

f). Formel zur Berechnung des Endwerts eines auf Zinseszinsen stehenden Kapitals, dessen $\frac{1}{m}$ jährige Zinsen zu einem niedrigeren Zinsfuss als das Kapital selbst verzinst und alle $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapital geschlagen werden.

40). ***Formel 22a:** $K = k\,.\left[1 + \frac{P}{p}\left(\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m\,.\,n} - 1\right)\right]$. . ist entwickelt in der Erkl. 142.

k bedeut. das Anfangskapital, K " " Endkapital, P " den Zinsfuss, zu welchem das Kapital verzinst wird, und p bedeut. den kleineren Zinsfuss, zu welchem die Zinsen jenes Kapitals k weiter verzinst werden, n bedeutet die Anzahl der Jahre, m bedeutet den Jahresbruchteil.

r). **Leibnitz'sche Diskontoformel.**

41). **Formel 23:** $D = \frac{K}{1{,}0p^n}\left(1{,}0p^n - 1\right)$. . ist entwickelt in Antw. der Frage 17 (siehe d. Anhang des 1. Teils).

s). **Hoffmann'sche Diskontoformel.**

(Gehört nicht zur Zinseszinsrechnung und ist hier nur zur Vervollständigung angeführt.)

42). **Formel 24:** $d = \frac{K\,.\,n\,.\,0{,}0p}{1 + n\,.\,0{,}0p}$ ist entwickelt in Antw. der Frage 18 (siehe d. Anhang des 1. Teils).

D bedeut. den Leibnitz'schen Diskont (das Leibnitz'sche Interusurium), K bedeutet das zu diskontierende (früher gezahlte) Kapital, p bedeutet den Zinsfuss, n " die Anzahl der Jahre, welche angibt, wieviel Jahre das Kapital K früher gezahlt wird, d bedeutet den Hoffmannschen Diskont (das Hoffmann'sche Interusurium).

II. Formeln für die Rentenrechnung.

A. Zeitrenten.

a). Rentenformeln für eine nachschüssige Jahresrente.

43). Formel 25: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 36.

44). „ 25a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{(q - 1) \cdot q^n}$

45). „ 25b: $w = \frac{r}{0{,}0p} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}0p^n}\right)$. . ist entwickelt in der Erkl. 175.

46). „ 26: $W = w \cdot 1{,}0p^n$ ist entwickelt in der Erkl. 176.

47). „ 26a: $W = w \cdot q^n$

48). „ 27: $W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 37.

49). „ 27a: $W = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Anmerkungen.

w bedeutet den baren Wert, die Mise der Rente,
r bedeutet den Betrag einer Rate derselben,
p bedeutet den Zinsfuss,
n „ die Anzahl der Jahre, welche angibt, wie lange die Rente läuft, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge,
q bedeutet den Zinsfaktor, d. i. der Wert der Geldeinheit bei p % nach Ablauf eines Jahres $= \frac{100 + p}{100} = 1{,}0p$
W bedeutet den Endwert der Rente.

b). Rentenformeln für eine vorschüssige Jahresrente.

50). Formel 28: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 38.

51). „ 28a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$

52). „ 29: $W = \frac{r \cdot 1{,}0p\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 39.

53). „ 29a: $W = \frac{r \cdot q\,(q^n - 1)}{q - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r, p, n und q ergibt sich aus der vorstehenden Anmerkung.

c). Rentenformeln für eine nachschüssige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

54). *Formel 30: $w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n}}$. . . ist entwickelt in Antwort der Frage 40.

55). * „ 30a: $w = \frac{r \cdot (q_1^{m \cdot n} - 1)}{(q_1 - 1) \cdot q_1^{m \cdot n}}$

56). * „ 31: $W = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$. . . ist entwickelt in Antwort der Frage 41.

57). * „ 31a: $W = \frac{r \cdot (q_1^{m \cdot n} - 1)}{q_1 - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r und p ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.
m bedeutet den Jahresbruchteil, an dessen Ende die einzelnen Raten fällig sind.
q_1 bedeutet den Zinsfaktor für $\frac{1}{m}$ Jahr, nämlich $= \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} = 1{,}0\frac{p}{m}$

d). Rentenformeln für eine vorschüssige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

Anmerkungen.

58). *Formel 32: $w = \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1}}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 42.

59). * „ 32a: $w = \frac{r \cdot (q_1^{m.n} - 1)}{(q_1 - 1) \cdot q_1^{m \cdot n - 1}}$

60). * „ 33: $W = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}\left(1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 43.

61). * „ 33a: $W = \frac{r \cdot q_1 (q_1^{m \cdot n} - 1)}{q_1 - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r, p, m und q_1 ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.

e). Rentenformeln für eine nachschüssige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

62). Formel 34: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot (1{,}0p^b - 1)}$. . . ist entwickelt in Antwort der Frage 44.

63). „ 34a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q^b - 1)}$

64). „ 35: $W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 45.

65). „ 35a: $W = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r, p und n ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.
Der Buchstabe b bedeutet die Anzahl der Rentenbezüge, bezw. die Anzahl der Jahre, nach welchen die einzelnen Raten fällig sind, **wobei vorausgesetzt wird, dass n durch b ohne Rest teilbar ist.**

f). Rentenformeln für eine vorschüssige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

66). Formel 36: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 46.

67). „ 36a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-b} \cdot (q^b - 1)}$

68). „ 37: $W = \frac{r \cdot 1{,}0p^b \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 47.

69). „ 37a: $W = \frac{r \cdot q^b \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r, p, n und b ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.
Vorausgesetzt wird, dass n durch b ohne Rest teilbar ist.

g). Rentenformeln für aufgeschobene Jahresrenten.

α). Für nachschüssige Renten.

70). Formel 38: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{a+n}}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 48.

71). „ 38a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{(q - 1) \cdot q^{a+n}}$

72). **Formel** 39: $W = \frac{r.(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 49.

73). „ 39a: $W = \frac{r.(q^n - 1)}{q - 1}$

β). Für vorschüssige Renten.

74). **Formel** 40: $w = \frac{r.(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p . 1{,}0p^{a+n-1}}$. . . ist entwickelt in Antwort der Frage 50.

75). „ 40a: $w = \frac{r.(q^n - 1)}{(q - 1) . q^{a+n-1}}$

76). „ 41: $W = \frac{r . 1{,}0p . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 51.

77). „ 41a: $W = \frac{r . q . (q^n - 1)}{q - 1}$

Anmerkungen.

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r und p ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.

Der Buchstabe n bedeutet die Zahl der Jahre, welche angibt, wie lange die Rente läuft, bezw. bedeutet die Anzahl der Rentenbezüge.

Der Buchstabe a bedeutet die Zahl der Jahre, nach welchen die Rente beginnt.

h). **Rentenformeln für aufgeschobene Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.**

α). Für nachschüssige Renten.

78). ***Formel** 42: $w = \frac{r . \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \cdot 1{,}0p^a}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 52.

79). * „ 42a: $w = \frac{r . (q_1^{m.n} - 1)}{(q_1 - 1) . q_1^{m.n} . q^a}$

80). * „ 43: $W = \frac{r . \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$. . . ist entwickelt in Antwort der Frage 53.

81). * „ 43a: $W = \frac{r . (q_1^{m.n} - 1)}{q_1 - 1}$

β). Für vorschüssige Renten.

82). ***Formel** 44: $w = \frac{r . \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1} \cdot 1{,}0p^a}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 54.

83). * „ 44a: $w = \frac{r . (q_1^{m.n} - 1)}{(q_1 - 1) . q_1^{m.n-1} . q^a}$

84). * „ 45: $W = \frac{r . 1{,}0\frac{p}{m} \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 55.

85). * „ 45a: $W = \frac{r . q_1 . (q_1^{m.n} - 1)}{q_1 - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r und p ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.

Der Buchstabe n bedeutet die Zahl der Jahre, welche angibt, wie lange die Rente läuft.

Der Buchstabe m bedeutet den Jahresbruchteil, von welchem die Raten r der Rente fällig sind.

Das Produkt $m.n$ ergibt die Anzahl der Rentenbezüge.

Der Buchstabe q_1 bedeutet den Wert der Geldeinheit bei p% nach Ablauf eines $\frac{1}{m}$ Jahres.

Der Buchstabe q bedeutet den gewöhnlichen Zinsfaktor, d. i. der Wert der Geldeinheit nach Verlauf eines Jahres bei p %.

i). Rentenformeln für aufgeschobene Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

α). Für nachschüssige Renten.

Anmerkungen.

86). Formel 46: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{a+n} \cdot (1{,}0p^b - 1)}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 56.

87). „ 46a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{a+n} \cdot (q^b - 1)}$

88). „ 47: $W = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 57.

89). „ 47a: $W = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1}$

β). Für vorschüssige Renten.

90). Formel 48: $w = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{a+n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 58.

91). „ 48a: $w = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{a+n-b} \cdot (q^b - 1)}$

92). „ 49: $W = \frac{r \cdot 1{,}0p^b \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 59.

93). „ 49a: $W = \frac{r \cdot q^b \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: W, w, r, p und n ergibt sich aus den vorstehenden Anmerkungen.
Der Buchstabe b bedeutet die Anzahl der Rentenbezüge, bezw. die Anzahl der Jahre, nach welchen die einzelnen Raten fällig sind, **wobei vorausgesetzt wird, dass n durch b ohne Rest teilbar ist.**

B. Leibrenten.

(Siehe Kleyers Lehrbücher über das Versicherungswesen.)

C. Ewige Renten.

a). Rentenformeln für eine nachschüssige ewige Jahresrente.

94). Formel 50: $w = \frac{100 \cdot r}{p}$ oder $= \frac{r}{0{,}0p}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 60.

95). „ 50a: $w = \frac{r}{q - 1}$

b). Rentenformeln für eine vorschüssige ewige Jahresrente.

96). Formel 51: $w = \frac{100 \cdot r}{p} \cdot 1{,}0p$ ist entwickelt in Antwort der Frage 61.

97). „ 51a: $w = \frac{r \cdot q}{q - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: w, r, p und q ergibt sich aus den früheren Anmerkungen.

c). Rentenformeln für eine nachschüssige ewige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

98). *Formel 52: $w = \frac{100 \cdot r}{\frac{p}{m}}$ oder $= \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m}}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 62.

99). * „ 52a: $w = \frac{r}{q_1 - 1}$

d). Rentenformeln für eine vorschüssige ewige Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

100). *Formel 53: $w = \frac{100 . r . 1{,}0\frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}$ oder $= \frac{r . 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m}}$ ist entwickelt in Antw. der Frage 63.

101). * „ 53a: $w = \frac{r . q_1}{q_1 - 1}$

Anmerkungen.

Die Bedeutung der Buchstaben: w, p und r ergibt sich aus den früheren Anmerkungen.

Der Buchstabe m bedeutet den Jahresbruchteil, vor welchem die einzelnen Raten fällig sind.

Der Buchstabe q_1 bedeutet den Wert der Geldeinheit bei p % nach Ablauf eines $\frac{1}{m}$ Jahres.

e). Rentenformeln für eine nachschüssige ewige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

102). Formel 54: $w = \frac{r}{1{,}0p^b - 1}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 64.

103). „ 54a: $w = \frac{r}{q^b - 1}$

f). Rentenformeln für eine vorschüssige ewige Rente, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

104). Formel 55: $w = \frac{r . 1{,}0p^b}{1{,}0p^b - 1}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 65.

105). „ 55a: $w = \frac{r . q^b}{q^b - 1}$

Die Bedeutung der Buchstaben: w, p und r ergibt sich aus den früheren Anmerkungen.

Der Buchstabe b bedeutet die Anzahl der Jahre, nach welchen die einzelnen Raten fällig sind.

g). Rentenformeln für aufgeschobene ewige Jahresrenten.

α). Für nachschüssige Renten.

106). Formel 56: $w = \frac{100 . r}{p . 1{,}0p^a}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 66.

107). „ 56a: $w = \frac{r}{(q-1) . q^a}$

β). Für vorschüssige Renten.

108). Formel 57: $w = \frac{100 . r}{p . 1{,}0p^{a-1}}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 67.

109). „ 57a: $w = \frac{r}{(q-1) . q^{a-1}}$

Die Bedeutung der Buchstaben: w, p, r und q ergibt sich aus den früheren Anmerkungen.

Der Buchstabe a bedeutet die Anzahl der Jahre, um welche die Rente aufgeschoben ist.

h). Rentenformeln für aufgeschobene ewige Renten, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahr fällig sind.

α). Für nachschüssige Renten.

110). *Formel 58: $w = \frac{100 . r}{\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a}$ ist entwickelt in Antwort der Frage 68.

111). * „ 58a: $w = \frac{r}{q_1 \cdot q^a}$

β). Für vorschüssige Renten.

112). *Formel 59: $w = \frac{100 . r}{\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^a} \cdot 1{,}0\frac{p}{m}$. . . ist entwickelt in Antwort der Frage 69.

113). * „ 59: $w = \frac{r . q_1}{(q_1 - 1) . q}$

Die Bedeutung der Buchstaben: w, r, p, q und a ergibt sich aus den früheren Anmerkungen.

Der Buchstabe m bedeutet den Jahresbruchteil, nach welchem die einzelnen Raten fällig sind.

Der Buchstabe q_1 bedeutet den Wert der Geldeinheit bei p % nach Verlauf eines $\frac{1}{m}$ Jahres.

i). Rentenformeln für aufgeschobene ewige Renten, deren Raten alle b Jahre fällig sind.

Anmerkungen.

α). Für nachschüssige Renten.

114). Formel 60: $w = \dfrac{r}{1{,}0p^{a} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 70.

115). „ 60a: $w = \dfrac{r}{q^{a} \,.\, (q^{b} - 1)}$

β). Für vorschüssige Renten.

116). Formel 61: $w = \dfrac{r}{1{,}0p^{a-b} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)}$. . ist entwickelt in Antwort der Frage 71.

117). „ 61a: $w = \dfrac{r}{q^{a-b} \,.\, (q^{b} - 1)}$

Die Bedeutung der Buchstaben: w, r, p und q ergibt sich aus den früheren Anmerkungen.
Der Buchstabe a bedeutet die Anzahl der Jahre, welche angibt, wie lange die Rente aufgeschoben ist.
Der Buchstabe b bedeutet die Anzahl der Jahre, nach welchen die einzelnen Raten fällig sind.

k). Formeln zur Berechnung des mittleren Zahlungstermins t.

α). einer nachschüssigen Jahresrente.

118). Formel 62: $t = \dfrac{\log n + \log 0{,}0p + n \,.\, \log 1{,}0p - \log (1{,}0p^{n} - 1)}{\log 1{,}0p}$ (siehe Erkl. 218)

β). einer vorschüssigen Jahresrente.

119). Formel 63: $t = \dfrac{\log n + \log 0{,}0p + (n-1) \,.\, \log 1{,}0p - \log (1{,}0p^{n} - 1)}{\log 1{,}0p}$ (siehe Erkl. 219)

t bedeutet den mittleren Zahlungstermin,
n bedeutet die Anzahl der Rentenbezüge und
p bedeutet den Prozentsatz.

l). Weitere Formeln für solche nachschüssige Renten, deren Raten nach geometrischer oder arithmetischer Progression zunehmen.

α). Raten wachsend nach geometrischer Progression.

120). Formel 64: $w = \dfrac{r \,.\, (q^{n} - 1{,}0p^{n})}{1{,}0p^{n} \,.\, (q - 1{,}0p)}$. . ist entwickelt in der Erkl. 228.

121). „ 65: $W = \dfrac{r \,.\, (q^{n} - 1{,}0p^{n})}{q - 1{,}0p}$ „ „ „ „ „ „

r bedeutet die am Ende des 1. Jahres fällige Rate;
q bedeutet die Zahl, welche angibt, um wievielmal jede folgende Rate grösser als die nächst vorhergehende ist;
n bedeutet die Anzahl der Jahre, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge, und
p bedeutet den Prozentsatz.

β). Raten wachsend nach arithmetischer Progression.

122). Formel 66: $w = \dfrac{1}{1{,}0p^{n} \,.\, 0{,}0p} \,.\, \left[r\,(1{,}0p^{n} - 1) - d\,(n - 1) + \dfrac{d \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p} \right]$. . ist entwickelt in der Erkl. 231.

123). Formel 67: $W = \dfrac{r \,.\, (1{,}0p^{n} - 1)}{0{,}0p} - \dfrac{d\,(n - 1)}{0{,}0p} + \dfrac{d \,.\, 1{,}0p\,(1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p^{2}}$. . . ist entwickelt in der Erkl. 231.

r bedeutet die am Ende des 1. Jahres fällige Rate,
d bedeutet die Zahl, welche angibt, um welche jede folgende Rate grösser als die nächst vorhergehende ist;
n bedeutet die Anzahl der Jahre, bezw. die Anzahl der Rentenbezüge, und
p bedeutet den Prozentsatz.

D. Uebersichtliche Zusammenstellung

des Inhalts der in diesem Buche enthaltenen vollständig gelösten Aufgaben.

Auf-gaben-Nr.

1). Berechnung des künftigen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals . . 1
2). Berechnung des künftigen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals bei genauer Angabe der Jahresdaten . 52
3). Berechnung des künftigen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals, wenn die Anzahl der Jahre n eine gebrochene ist 20
4). Berechnung des künftigen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals, welches durch jährliche Zahlungen vermehrt wird 50
5). Berechnung des künftigen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals, wenn die Zinsen nur zu p_1 % weiter verzinst werden 76
6). Berechnung des künftigen Wertes eines Pfennigs, welcher zur Zeit Christi Geburt auf Zinsen gegeben wurde . 44
7). Berechnung des ursprünglichen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals 2
8). Berechnung des ursprünglichen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals bei genauer Angabe der Jahresdaten 53
9). Berechnung des ursprünglichen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals, wenn die Zinsen monatlich zum Kapital geschlagen werden 10
10). Berechnung des ursprünglichen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals, wenn man dessen Beziehung zu einem andern ausgeliehenen Kapitale kennt . . 23
11). Berechnung des ursprünglichen Wertes eines auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals, das eine gewisse Zeit zu p %, dann a Mark verlor und weiter zu p_1 % stand . . 58
12). Berechnung der Zeit, welche angibt, wie lange ein Kapital auf Zinseszinsen ausgeliehen werden muss, um zu einer bestimmten Summe anzuwachsen 3
13). Berechnung der Zeit, unter denselben Bedingungen wie vorher, bei genauer Angabe der Jahresdaten . 54
14). Berechnung der Zeit, unter denselben Bedingungen wie vorher, für den Fall, dass sich eine gebrochene Zahl ergab, und zwar nach dem üblichen Gebrauch und nach streng mathematischen Grundsätzen 28, 29
15). Berechnung der Zeit, nach welcher sich ein Kapital verdoppelt, verdreifacht etc. . . 9
(Aufgabe 5 der 1. Aufl.)
16). Berechnung der Zeit, nach welcher zwei verschiedene Kapitalien unter verschiedenen Bedingungen gleiche Werte erlangen 61
17). Berechnung der Zeit, nach welcher ein Kapital, welches eine Zeit lang zu p % und eine andre Zeit lang zu p_1 % ausstand, um das m-fache angewachsen ist . . . 70
18). Berechnung der Zeitdauer des Rechtsverhältnisses zweier Kontrahenten bei gegenseitiger Ueberlassung von Kapitalien unter verschiedenen Bedingungen 25
19). Berechnung des Zinsfusses, zu welchem ein Kapital ausgeliehen werden muss, um in einer bestimmten Zeit zu einer bestimmten Summe anzuwachsen 4
20). Berechnung des Zinsfusses, unter denselben Bedingungen wie vorher, bei genauer Angabe der Jahresdaten . 55
21). Berechnung des Zinsfusses für einen auf eine höhere Summe ausgestellten Schuldschein 36
22). Berechnung der Zinsfüsse, zu welchen zwei verschiedene Kapitalien angelegt werden müssen, damit sie gleiche Werte erlangen 62
23). Berechnung der Zinsfüsse, zu welchen zwei Kapitalien angelegt sind, wenn man das Verhältnis der Zinsfüsse und das der Kapitalien selbst kennt 63
24). Berechnung der Prozente, welche zwei Wucherer für ein und dasselbe Darlehen unter sonst verschiedenen Bedingungen nehmen 33
25). Berechnung der Zinseszinsen eines ausgeliehenen Kapitals 57
26). Berechnung der Zinsen und Zinseszinsen eines ausgeliehenen Kapitals, wenn die Zahl n der Jahre eine gemischte Zahl ist 35
27). Berechnung der $\frac{1}{m}$jährl. Zinsen für 100, wenn die jährlichen p % betragen (Formel 21) 46
28). Berechnung der jährlichen Zinsen für 100, wenn die $\frac{1}{m}$jährlichen Zinsen $= p_m$ % betragen (Formel 22) . 47
29). Berechnung der entsprechenden Veränderung eines ausgeliehenen Kapitals, wenn sich der Zinsfuss in einer gewissen Zeit ändert und man trotzdem in einer bestimmten Zeit ein bestimmtes Kapital erlangen will 65

Aufgaben-Nr.

30). Berechnung des künftigen Wertes jährlicher Ersparungen 11, 446, 478
31). Berechnung des künftigen Wertes solcher Ersparungen, welche in gleichen Terminen von je m Jahren gedacht werden 69, 338
32). Berechnung des künftigen Wertes von Ersparungen, wenn jährlich ein gewisser Prozentsatz für Verwaltungskosten abgezogen wird 66
33). Berechnung des künftigen Wertes solcher jährlichen Ersparungen, welche nach arithmetischer Progression wachsen . 447
34). Berechnung der Zeit, nach welcher bei jährlichen Einzahlungen eine bestimmte Summe erspart wird . 14
35). Berechnung der Zeit, unter denselben Bedingungen wie vorher, bei genauer Angabe der Jahresdaten . 72
36). Berechnung der Zeit, nach welcher zwei Personen unter Berücksichtigung ihrer jährlichen Einnahmen und Ausgaben gleiches Vermögen haben 64
37). Berechnung des Gewinnes einer Sparkasse, welche für vereinnahmte Gelder die Zinsen jährlich, für verausgabte Gelder die Zinsen $^1/_4$ jährlich berechnet 24
38). Berechnung des Gewinnes, welcher sich bei der Bewirtschaftung eines Gutes aus der jährlichen Einnahme und Ausgabe ergibt 30
39). Berechnung des Unterschiedes zweier verschiedener jährlichen Ersparungen . . . 27

40). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, welche zur Tilgung einer Schuld gezahlt werden müssen . 181, 324, 448
41). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, welche zur Tilgung einer Schuld von einem späteren Zeitpunkte ab gezahlt werden müssen 38
42). Berechnung der jährlichen Tilgungsqoten, welche zur Tilgung eines zum Bau eines Krankenhauses bei einer Provinzialhülfskasse aufgenommenen Anlehens gezahlt werden müssen . 43
43). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, welche zur Tilgung eines zum Ankauf einer Liegenschaft aufgenommenen Anlehens gezahlt werden müssen, hierbei das Grundkapital zu p %, die Tilgungsquoten aber nur zu p_1 % verzinst werden . . 73
44). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, unter denselben Bedingungen wie vorhin, wenn mit der a^{ten} Tilgungsquote zugleich der Rest der Schuld getilgt wird . . . 74
45). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, wenn während des Rechtsverhältnisses der Zinsfuss konvertiert wurde . 451
46). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, und zwar in Prozenten der Schuldsumme ausgedrückt . 453
47). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, zahlbar in den n ersten und zahlbar in n_1 späteren Jahren . 457
48). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, wenn dieselben in geometrischer Progression wachsen . 458
49). Berechnung der halbjährlichen Tilgungsquoten, welche zur Tilgung einer Schuld geleistet werden müssen . 452
50). Berechnung der halbjährlichen Tilgungsquoten, wenn nach einer gewissen Zeit eine bestimmte Summe und dann weitere halbjährliche Tilgungsqoten geleistet werden sollen . 351, 463
51). Berechnung der letzten Tilgungsquote, wenn in gleichen Terminen von je m Jahren die Tilgungsquoten geleistet werden sollen 337
52). Berechnung der Tilgungsquoten, welche in verschiedenen Terminen zahlbar sind . . 455
53). Berechnung der Tilgungsquoten, welche in gleichen Terminen von je m Jahren anstatt jährlicher Tilgungsquoten zu leisten sind 456
54). Berechnung der Zeit, nach welcher bei jährlichen Tilgungen eine Schuld getilgt wird 34
55). Berechnung der Zeit, nach welcher bei jährlichen Tilgungen eine Schuld getilgt wird, wenn sich für die Zahl der berechneten Jahre eine gemischte Zahl ergab . . . 49
56). Berechnung der Zeit, nach welcher ein Kapital amortisiert ist, wenn dasselbe erst nach a Jahren einen jährlichen Ertrag abwirft 340
57). Berechnung der Zeit, nach welcher ein Kapital amortisiert ist, wenn jährlich p_1 % abgetragen werden . 462
58). Berechnung der Anzahl der zu leistenden Tilgungsquoten, damit ein Anlehen amortisiert wird . 464
59). Berechnung des ursprünglichen Wertes eines Kapitals, das zu p % geliehen und zu p_1 % ausgeliehen war, wenn man den Unterschied der Endkapitalien kennt . . . 60
60). Berechnung eines Anlehens, das in einer bestimmten Zeit bei jährlichen Tilgungen amortisiert wird . 17
61). Berechnung des Restes einer Schuld nach einer gewissen Anzahl jährlicher Tilgungen 15

Aufgaben-Nr.

62). Berechnung des Restes einer Schuld, wenn in verschiedenen Zeiten verschiedene Summen abgetragen wurden . 42
63). Berechnung der Prozente, welche eine Kasse für ein bei ihr aufgenommenes und durch Jahreszahlungen zu tilgendes Anlehen berechnet 51

64). Berechnung des baren Wertes einer später zu zahlenden Schuld, Diskont p % 7 (Aufg. 8 der 1. Aufl.), 37, 470
65). Berechnung des baren Wertes einer Schuld, welche alle a Jahre zu zahlen ist, Diskont p % . 459
66). Berechnung des baren Wertes einer Schuld, welche mit p % einfachen Zinsen verzinst wird, Diskont p % . 468
67). Berechnung der jährlichen Tilgungsquoten, welche zur Tilgung einer später fälligen Schuld geleistet werden, Diskont p % 469

68). Berechnung des mittl. Zahlungstermins für jährl. zu zahlende gleiche Summen 67, 465, 466
69). Berechnung des mittl. Zahlungstermins für jährlich zu zahlende verschiedene Summen 68
70). Berechnung des mittleren Zahlungstermins für verschiedene in verschiedenen Zeiten zahlbare Schuldsummen . 32
71). Berechnung d. mittl. Zahlungstermins einer nachschüssigen Jahresrente (Formel 62) 346
72). „ „ „ „ „ vorschüssigen „ („ 63) 347, 348

73). Berechnung rückständiger Posten . 12
74). Berechnung d. Zeit, nach welcher jemand bei jährl. Wegnahme sein Vermögen aufbraucht 16
75). Berechnung der Zeit, welche angibt, wie lange eine jährl. Einnahme (z. B. Stadtzoll) verkauft werden kann . 325
76). Berechnung der Zeit, nach welcher sich Aktionäre unter gegebenen Bedingungen wieder im Besitze ihres Anlagekapitals befinden 599, 502
77). Berechnung der Barzahlung, welche ein Wucherer bei Aufnahme eines Anlehens macht, wenn er im voraus seine Prozente abzieht und die Tilgungsquoten in verschiedenen Terminen zu entrichten sind . 71
78). Berechnung des Grundkapitals einer Aktiengesellschaft unter gegebenen Bedingungen 454
79). Berechnung der Höhe eines Anlehens, das zum Bau einer Eisenbahn aufgenommen und durch die überschüssigen jährlichen Einnahmen eines Staates in n Jahren getilgt werden soll . 503
80). Berechnung des Gewinns der Aktionäre einer Eisenbahn, welche vom Staate angekauft wird . 504
81). Berechnung des einmaligen Anlagekapitals für den Bau und Instandhaltung einer Dampfmaschine . 506
82). Berechnung der baren Abfindungssumme für den Kauf eines Grundeigentums 13, 460
83). Berechnung der nach n Jahren auf einmal zu leistenden Abfindungssumme für eine gewisse Anzahl jährlich zu zahlender Summen 39
84). Berechnung des Betrags eines Wechsels, fällig nach einer bestimmten Zeit, durch welchen mehrere andre Wechsel ausser Kurs gesetzt werden sollen 41
85). Berechnung des Voranschlags eines Schulgebäudes, wenn das aufzunehmende Anlehen durch bestimmte jährliche Tilgungen in n Jahren getilgt sein soll 461
86). Berechnung der höchsten Angebote, welche von mehreren Liebhabern auf eine Liegenschaft gemacht werden 6 (Aufg. 7 der 1. Aufl.), 499, 501
87). Berechnung des Kaufpreises eines Hauses, für welches in gewissen Terminen Zahlungen zu leisten sind . 26, 498
88). Berechnung des Zinsfusses, welcher dem Verkaufe eines Gutes, bei sonst verschiedenen Bedingungen, zu Grunde gelegt wird 75
89). Berechnung der baren Einzahlung für eine nachschüssige Leibrente (Zeitrente) . . 323
90). „ „ „ „ „ „ aufgeschobene nachschüssige Jahresrente 339
91). „ „ „ „ „ „ Jahresrente, wenn ausser der baren Einzahlung jährlich noch r Mark eingezahlt werden 332, 484
92). Berechnung der baren Einzahlung für eine aufgeschobene ½jährige Rente 333
93). „ „ „ „ „ „ nachschüssige Rente, alle b Jahre fällig 338
94). Berechnungen über das Umändern von Renten in andre 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359
95). Berechnung des Verhältnisses der jährlich zu machenden Einzahlungen und der Raten einer später zu beziehenden Rente 352
96). Berechnung des Zinsfusses einer nachschüssigen Jahresrente 326
97). „ „ Endwertes von Renten 327, 336

Aufgaben-Nr.

98). Berechnung der jährlich zu machenden Einzahlungen zum Zweck des späteren Bezugs einer Rente 329, 471, 481, 482, 483, 341, 350, 360, 361, 349

99). Berechnung der jährlich nachzuzahlenden Prämien zum Zweck des späteren Bezugs einer Rente, wenn eine bestimmte Summe sofort eingezahlt wurde 483

100). Berechnung der Zeit, welche angibt, wie lange eine bestimmte Rente unter gegebenen Bedingungen bezogen werden kann 330, 331, 334, 342

101). Berechnung des baren Wertes einer Rente, deren Raten nach geometrischer oder arithmetischer Progression etc. zunehmen (Formeln 63—66) 364, 365, 366

102). Berechnung der Abfindungssumme aus einem immerwährend zu entrichtenden jährlichen Betrag . 486, 488, 496

103). Berechnung der Zehntablösung einer Gemeinde 487

104). Berechnung des Stiftungskapitals zur ewigen Unterhaltung eines Spitals 505

105). Berechnung der Abfindungssumme, des Kapitalanschlags der Baulast etc., für die periodisch wiederkehrende Herstellung eines Gebäudes, einer Brücke etc., auch wenn die Zinsen zu einem niedrigeren Zinsfuss als das Grundkapital verzinst werden 362, 363, 489, 490, 491, 495, 497, 492, 493, 494

106). Berechnung des Gewinnes und Verlustes einer Lebensversicherungs-Gesellschaft in Bezug auf eine vorschüssige Leibrente 328, 473, 475

107). Berechnung der Prämie, welche unter gewissen Bedingungen bei einer Assekuranz-Gesellschaft zu machen ist . 472, 477

108). Berechnung des Gewinnes oder Verlustes einer Witwenkasse in Bezug auf eine von ihr zu leistende Pension . 474, 479, 480

109). Berechnung der Zeit, in welcher ein auf Leibrente Versicherter seine versicherte Summe erreicht hat . 476

110). Berechnung des Zuwachses von Städte- und Landbevölkerungen . . 8 (Aufg. 9 der 1. Aufl.)

111). Berechnung des früheren Bestandes der Bevölkerung eines Staates aus dem gegenwärtigen Bestand und den jährlichen Geburten und Sterbefällen 21

112). Berechnung der Zeit, nach welcher eine Bevölkerung um ein Bestimmtes zugenommen hat, wenn man den Zuwachs auf 100 kennt 45, 48

113). Berechnung der Zeit, nach welcher eine Bevölkerung um ein Bestimmtes zugenommen hat, wenn man weiss, dass auf a Seelen g Geburten u. auf b Seelen s Todesfälle kamen 56

114). Berechnung der Menge Flüssigkeit, welche in einem bestimmten Gefässe nach wiederholter Versetzung durch eine andre Flüssigkeit, bleibt . . . 518, 519, 522, 524

115). Berechnung der Menge Silber, welche in einer Mischung von bestimmter Menge nach wiederholter Versetzung mit Kupfer verbleibt 520

116). Berechnung des Preises einer Mittelsorte Tabak, welche durch Mischung von zwei Sorten Tabak entstand . 521

117). Berechnung der Anzahl der Mischungen, welche mit bestimmten Mengen zweier verschiedener Farben vorgenommen werden müssen, damit schliesslich in der Mischung ein bestimmter Teil der ursprünglichen Menge einer der Farben verbleibt . . . 523

118). Berechnung des ursprünglichen Bestandes eines Waldes 5 (Aufg. 6 der 1. Aufl.)

119). Berechnung des Endbestandes eines Forstes, wenn jährlich ein gewisser Prozentsatz des Bestandes ausgehauen wird . 19

120). Berechnung der Zeit, nach welcher sich der Bestand eines Waldes um einen gewissen Bestand vermehrt . 22

121). Berechnung des finanziellen vorteilhafteren Abtriebsalters eines Waldes 59

122). Berechnung des baren Wertes eines Waldes, wenn man die jährlichen Reinerträge, auch bei Umänderung der Kultur etc., kennt . . 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513

123). Berechnung des jetzigen Wertes eines Walddistrikts, welcher ein gewisses Alter hat, in njährigen Umtrieben in verschiedenen Zeiten verschiedene jährliche Reinerträge abwirft und die jährlichen Ausgaben für Kulturkosten, Steuern, Hutkosten, Herstellung und Instandhaltung von Wegen etc. in Betracht kommen, auch wenn der Walddistrikt teilweise aus Unter- und Oberholz, aus Fichten-, Eichen- etc. Wald besteht . 515, 516, 517

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kleyer, Adolph

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens ; zum Gebrauch an niederen und höheren Schulen, zum rationellen Selbststudium, sowie zum praktischen Gebrauch

Stuttgart 1885

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.149-c
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841066-0